T.C.
SİVAS CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
BİLİMSEL ARAŞTIRMA PROJELERİ KOMİSYON BİRİMİ
PROJE SONUÇ RAPORU

ARALIKTA SÜREKSİZLİĞE SAHİP DİRAC DİFERANSİYEL SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN ASİMTOTİK YAKLAŞIMLAR

Prof. Dr. Baki KESKİN.

Bu proje Cumhuriyet Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu Tarafından F-568 Numaralı A tipi Bilimsel Araştırma Projesi Olarak Desteklenmiştir

SİVAS 2019

Bir takım uygulamalı bilimlerde özellikle de bazı fizik problemlerinde önemli bir yere sahip olan, diferansiyel operatörlerin spektral teorisi, düz spektral problemler ve ters spektral problemler olarak iki ana kola ayrılır.

Düz spektral problemler, verilen operatörün spektrumunun ve özfonksiyonlarının aranması ve verilen bir fonksiyonun operatörün özfonksiyonlarına göre ayrışımının incelenmesinden ibarettir. Spektral analizin ters problemleri ise verilen belirli dizilere göre, spektral karakteristikleri bu diziler olan operatörün inşaası ile ilgilenmektedir. Bu konudaki bazı çalışmalarda, verilen spektral karakteristiklerin operatörü tek şekilde belirlediğini gösteren, ters problemlerin çözümü için teklik teoremleri verilmiş; bazılarında ise verilen spektral karakteristiklere göre operatörün nasıl elde edilebileceği araştırılmış, yani algoritması verilmiştir. Fizik, mekanik, jeofizik, elektronik ve metalurji gibi farklı bilim dallarında bir çok kez ters problemlerle karşılaşılmaktadır. Homojen olmayan telin, onun öz titreşimlerine göre yoğunluğunun hesaplanması; parçacıklar arasındaki etkileşim kuvvetlerinin, bu parçacıkların enerji seviyelerine göre belirlenmesi; kuantum fiziğinde saçılma verilerine göre alan potansiyellerinin bulunması; jeofizikte yeraltı madenlerinin yeraltındaki elementlerin dağılım karakteristiklerine göre belirlenmesi problemlerinin herbiri spektral analizin ters problemlerine örnek teşkil eder.

Literatürde bir operatörün öz fonksiyonlarının sıfırları nodal noktalar olarak adlandırılır. Ters nodal problem, verilen nodal noktalar kümesi yardımıyla operatörün katsayılarını belirlemek üzerinedir ve güncel olarak birçok araştırmacı tarafından çalışılmaktadır. Sturm Liouville operatörleri için ters nodal problemler ilk olarak 1988 yılında McLaughlin tarafından ele alınmıştır. Bu çalışmada McLaughlin verilen öz fonksiyonların yoğun bir nodal noktalar alt kümesinin Sturm–Liouville probleminin potansiyelini belirlediğini göstermiştir. 1989 yılında Hald and McLaughlin çalışmalarında daha genel sınır koşulları için nodal noktalar yardımıyla potansiyeli belirlemek için nümerik bir şema vermişlerdir. Yang 1997 yılında yaptığı çalışmasında ters nodal Sturm–Liouville problemi için potansiyeli bulan bir algoritma vermiştir. Sturm–Liouville veya diffusion operatörleri için ters nodal problemler birçok çalışmada geniş şekilde ele alınmıştır.(P.J.Brown (2009),Browne (1996), Buterin (2009),Buterin (2012) , Cheng (2000), Law (1999), Ozkan (2015) , Shieh (2008),Yang (2011) ve Yang (2013)).

İntegro differansiyel operatorler için ters problemler Lokal olmayan problemlerdir ve diğer lokal olmayan operatörlerde olduğu gibi çalışılması lokal olan problemlerden daha zordur ve lokal operatörler için

kullanılan yöntemler sıklıkla burada bir sonuç vermemektedir. Bu tip operatörler için araştırmacılar yeni yöntemler oluşturmaya çalışmaktadır. Güncel çalışmalarda bu tip problemler ele alınmakta ve literatürde önemli bir yer edinmektedir.(Frciling (2001), Kuryshova (2007) and Wu (2014)).

Sturm-Liouville tipli integro-differansiyel operatörler için ters nodal problemler ilk olarak Y.V. Kuryshova, C.T. Shieh tarafından 2010 yılında ele alınmıştır. Bu çalışmada integral operatörünü katsayıları biliniyorken nodal noktalar yardımıyla potansiyelin belirlenebildiği gösterilmiştir. Dirac operatörünün bir integral operatörü ile pertürbe edilmiş hali (Dirac tipli integro-diferansiyel operatör) için ters nodal problemler ilk olarak B. Keskin ve A. S. Ozkan tarafından ele alınmıştır. Bu çalışmada klasik sınır koşullarında çözüm için elde edilen integral denklemler yardımıyla yeni bir asimptotik ifade elde edilmiş ve bu ifade yardımıyla hassas özdeğer ve nodal nokta davranışları hesaplanmıştır. Daha sonra elde edilen nodal nokta asimptotikleri kullanılarak teklik teoremi verilmiş ve nodal noktaların yoğun bir alt kümesi yardımıyla operatörün nasıl kurulacağına ilişkin algoritma elde edilmiştir. Sınır koşullarının spektral parametreyi lineer fonksiyon şeklinde içerdiği Dirac tipli integro-diferansiyel denklemlerin için düz problem ve ters nodal problem 2018 yılında B. Keskin ve H.D. Tel tarafından ele alınmış ve çözümün asimtotik davranışları, özdeğer ve özfonksiyonların özellikleri incelenmiş ve özfonksiyonların birinci bileşeninin sıfırları (nodal noktalar) yardımıyla operatörün katsayılarının nasıl belirlenebileceğiyle ilgili bir algoritma vermişler ve ayrıca integral parçayı da kısmen belirlemişlerdir. $L(\Omega, \theta, \beta, \sigma)$ ile

$$BY'(x) + \Omega(x)Y(x) = \mu Y(x), \quad x \in (0, \pi), \tag{1}$$

şeklinde Dirac diferansiyel denklem sistemi ve

$$y_1(0)\sin\theta + y_2(0)\cos\theta = 0 \tag{2}$$

$$y_1(\pi)\sin\beta + y_2(\pi)\cos\beta = 0 \tag{3}$$

sınır koşulları ve

$$\begin{aligned} y_1(\frac{\pi}{2}+0) &= \sigma y_1(\frac{\pi}{2}-0) \\ y_2(\frac{\pi}{2}+0) &= \sigma^{-1} y_2(\frac{\pi}{2}-0). \end{aligned} \tag{4}$$

süreksizlik koşulları tarafından üretilen problemi gösterelim. Burada μ spektral parametre, θ, β ve σ gerçel sayı

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\Omega(x) = \begin{pmatrix} V(x)+m & 0 \\ 0 & V(x)-m \end{pmatrix}$, $Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$,
$\Omega(x)$ reel değerli $W_2^1(0,\pi)$ uzayından fonksiyonlar, m reel sabittir.
$\varphi(x,\mu) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x,\mu) \\ \varphi_2(x,\mu) \end{pmatrix}$, (1) denkleminin $\varphi(0,\mu) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$
başlangıç koşulu ve (4) süreksizlik koşulu altında çözümü olsun. $\varphi(x,\mu)$
μ nün tam fonksiyonudur ve aşağıdaki asimtotik denklemleri sağlar
$x < \dfrac{\pi}{2}$ için

$$\varphi_1(x,\mu) = \cos(\mu x - \theta) \int_0^x \sin\mu(t-x)\varphi_1(t)p(t)dt + \int_0^x \cos\mu(t-x)\varphi_2(t)r(t)dt \tag{5}$$

$$\varphi_2(x,\mu) = \sin(\mu x - \theta) - \int_0^x \cos\mu(t-x)\varphi_1(t)p(t)dt - \int_0^x \sin\mu(t-x)\varphi_2(t)r(t)dt \tag{6}$$

ver $x > \dfrac{\pi}{2}$ için

$$\varphi_1(x,\mu) = \sigma^+\cos(\mu x - \theta) + \sigma^-\cos(\mu(\pi - x) - \theta) \int_0^{\pi/2} \left(\sigma^+\sin\mu(t-x) + \sigma^-\sin\mu(x+t-\pi)\right)\varphi_1(t)p(t)dt \tag{7}$$

$$+ \int_0^{\pi/2} \sigma^+\cos\mu(t-x) + \sigma^-\cos\mu(x+t-\pi)\varphi_2(t)r(t)dt$$

$$- \int_{\pi/2}^x \sin\mu(t-x)\varphi_1(t)p(t)dt + \int_{\pi/2}^x \cos\mu(t-x)\varphi_2(t)r(t)dt$$

$$\begin{aligned}
&\varphi_2(x,\mu) = \sigma^+ \sin(\mu x - \theta) - \sigma^- \sin(\mu(\pi - x) - \theta) \\
&- \int_0^{\pi/2} \left(\sigma^+ \cos\mu(t-x) - \sigma^- \cos\mu(x+t-\pi)\right) \varphi_1(t)p(t)dt \\
&- \int_0^{\pi/2} \sigma^+ \sin\mu(t-x) - \sigma^- \sin\mu(x+t-\pi)\varphi_2(t)r(t)dt \\
&- \int_{\pi/2}^{x} \cos\mu(t-x)\varphi_1(t)p(t)dt - \int_{\pi/2}^{x} \sin\mu(t-x)\varphi_2(t)r(t)dt
\end{aligned} \tag{8}$$

burada, $\sigma^{\pm} = \dfrac{1}{2}\left(\sigma \pm \dfrac{1}{\sigma}\right)$.

Teorem $\varphi_1(x,\lambda)$ ve $\varphi_2(x,\lambda)$ foksiyonları x e göre düzgün olarak $|\lambda|$ nın yeterince büyük değerlerinde aşağıdaki asimtotik ifadelere sahiptir, $x < \dfrac{\pi}{2}$ için

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(x,\mu) = \cos[\mu x - \rho(x) - \theta] \\
&+ \frac{m\sin\theta}{\mu} \sin[\mu x - \rho(x)] \\
&+ \frac{m^2 x}{2\mu} \sin[\mu x - \rho(x) - \theta] + o(\frac{e^{|\tau|x}}{\mu})
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
&\varphi_2(x,\mu) = \sin[\mu x - \rho(x) - \theta] \\
&- \frac{m\cos\theta}{\mu} \sin[\mu x - \rho(x)] \\
&- \frac{m^2 x}{2\mu} \cos[\mu x - \rho(x) - \theta] + o(\frac{e^{|\tau|x}}{\mu})
\end{aligned} \tag{10}$$

ve $x > \dfrac{\pi}{2}$ için

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1(x,\mu) = \sigma^+ \cos[\mu x - \rho(x) - \theta] \\
&+\sigma^- \cos[\mu x - \rho(x) - \mu\pi + 2\rho\left(\frac{\pi}{2}\right) + \theta] \\
&+\frac{\sigma^+ m \sin\theta}{\mu} \sin[\mu x - \rho(x)] \\
&-\frac{\sigma^- m \sin\theta}{\mu} \sin[\mu x - \rho(x) - \mu\pi + 2\rho\left(\frac{\pi}{2}\right)] \\
&+\frac{\sigma^+ m^2 x}{2\mu} \sin[\mu x - \rho(x) - \theta] \\
&-\frac{\sigma^- m^2 (\pi - x)}{2\mu} \sin[\mu x - \rho(x) - \mu\pi + 2\rho\left(\frac{\pi}{2}\right) + \theta] + o(\frac{e^{|\tau| x}}{\mu})
\end{aligned} \tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
&\varphi_2(x,\mu) = \sigma^+ \sin[\mu x - \rho(x) - \theta] \\
&+\sigma^- \sin[\mu x - \rho(x) - \mu\pi + 2\rho\left(\frac{\pi}{2}\right) + \theta] \\
&-\frac{\sigma^+ m \cos\theta}{\mu} \sin[\mu x - \rho(x)] \\
&+\frac{\sigma^- m \sin\theta}{\mu} \sin[\mu x - \rho(x) - \mu\pi + 2\rho\left(\frac{\pi}{2}\right)] \\
&-\frac{\sigma^+ m^2 x}{2\mu} \cos[\mu x - \rho(x) - \theta] \\
&+\frac{\sigma^- m^2 (\pi - x)}{2\mu} \cos[\mu x - \rho(x) - \mu\pi + 2\rho\left(\frac{\pi}{2}\right) + \theta] + o(\frac{e^{|\tau| x}}{\mu})
\end{aligned} \tag{12}
$$

burada $\rho(x) = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^x (p(t) + r(t))dt = \int\limits_0^x V(t)dt$ ve $\tau = \operatorname{Im}\mu$.ve $\tau = \operatorname{Im}\lambda$ şeklindedir.

İspat (5) ve (6) integral denklemlerine ardışık yaklaşımlar yöntemini uygulayabilmek için

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{1,0}(x,\mu) = \cos(\mu x - \theta) \\
&\varphi_{2,0}(x,\mu) = \sin(\mu x - \theta) \\
&\varphi_{1,n+1}(x,\mu) = \int\limits_0^x \sin\mu(x-t)\varphi_{1,n}(t)p(t)dt + \int\limits_0^x \cos\mu(x-t)\varphi_{2,n}(t)r(t)dt \\
&\varphi_{2,n+1}(x,\mu) = -\int\limits_0^x \cos\mu(x-t)\varphi_{1,n}(t)p(t)dt + \int\limits_0^x \sin\mu(x-t)\varphi_{2,n}(t)r(t)dt
\end{aligned}
$$

yazalım böylece

$$\varphi_{1,1}(x,\mu) = \sin(\mu x - \theta)\,\rho(x) + \frac{m\sin\theta}{\mu}\sin\mu x + o(\frac{e^{|\tau|x}}{\mu})$$

$$\varphi_{2,1}(x,\mu) = -\cos(\mu x - \theta)\,\rho(x) - \frac{m\cos\theta}{\mu}\sin\mu x + o(\frac{e^{|\tau|x}}{\mu})$$

ve $n \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
\varphi_{1,2n+1}(x,\mu) &= (-1)^n \sin(\mu x - \theta)\,\frac{\rho^{2n+1}(x)}{(2n+1)!} \\
&+ \frac{(-1)^n m\sin\theta}{\mu}\sin\mu x\frac{\rho^{2n}(x)}{(2n)!} \\
&+ \frac{(-1)^n m^2 x\sin\theta}{2\mu}\sin\mu x\frac{\rho^{2n-1}(x)}{(2n-1)!} \\
&+ \frac{(-1)^n m^2 x\cos\theta}{2\mu}\cos\mu x\frac{\rho^{2n-1}(x)}{(2n-1)!} + o(\frac{e^{|\tau|x}}{\mu})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{1,2n}(x,\mu) &= (-1)^n \cos(\mu x - \theta)\,\frac{\rho^{2n}(x)}{(2n)!} \\
&+ \frac{(-1)^n m\sin\theta}{\mu}\cos\mu x\frac{\rho^{2n-1}(x)}{(2n-1)!} \\
&+ \frac{(-1)^{n+1} m^2 x\cos\theta}{2\mu}\sin\mu x\frac{\rho^{2n-2}(x)}{(2n-2)!} \\
&+ \frac{(-1)^{n+1} m^2 x\sin\theta}{2\mu}\cos\mu x\frac{\rho^{2n-2}(x)}{(2n-2)!} + o(\frac{e^{|\tau|x}}{\mu})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{2,2n+1}(x,\mu) &= (-1)^{n+1} \cos(\mu x - \theta)\,\frac{\rho^{2n+1}(x)}{(2n+1)!} \\
&+ \frac{(-1)^{n+1} m\cos\theta}{\mu}\sin\mu x\frac{\rho^{2n}(x)}{(2n)!} \\
&+ \frac{(-1)^{n+1} m^2 x\sin\theta}{2\mu}\cos\mu x\frac{\rho^{2n-1}(x)}{(2n-1)!} \\
&+ \frac{(-1)^n m^2 x\cos\theta}{2\mu}\sin\mu x\frac{\rho^{2n-1}(x)}{(2n-1)!} + o(\frac{e^{|\tau|x}}{\mu})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{2,2n}(x,\mu) &= (-1)^n a_2 \sin(\mu x-\theta)\frac{\rho^{2n}(x)}{(2n)!}\\ &+\frac{(-1)^{n+1}m\cos\theta}{\mu}\cos\mu x\frac{\rho^{2n-1}(x)}{(2n-1)!}\\ &+\frac{(-1)^n m^2 x\sin\theta}{2\mu}\sin\mu x\frac{\rho^{2n-2}(x)}{(2n-2)!}\\ &+\frac{(-1)^n m^2 x\cos\theta}{2\mu}\cos\mu x\frac{\rho^{2n-2}(x)}{(2n-2)!}+o(\frac{e^{|\tau|x}}{\mu})\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak için $|\mu|$ nün yeterince büyük değerleri için x e göre düzgün olarak.$x<\frac{\pi}{2}$ için ispat tamamlanmış olur.

(7) ve (8), integral denklemlerine benzer işlemleri yapmak amacıyla

$$\begin{aligned}\varphi_{2,n+1}(x,\mu) &= -\int_0^{\pi/2}\left(\sigma^+\cos\mu(t-x)-\sigma^-\cos\mu(x+t-\pi)\right)\varphi_{1,n}(t)p(t)dt\\ &-\int_0^{\pi/2}\left(\sigma^+\sin\mu(t-x)-\sigma^-\sin\mu(x+t-\pi)\right)\varphi_{2,n}(t)r(t)dt\\ &-\int_{\pi/2}^{x}\cos\mu(t-x)\varphi_{1,n}(t)p(t)dt-\int_{\pi/2}^{x}\sin\mu(t-x)\varphi_{2,n}(t)r(t)dt,\end{aligned}$$

şeklinde gösterelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}\varphi_{1,1}(x,\mu) &= \sigma^+\sin(\mu x-\theta)\rho(x)-\sigma^-\sin(\mu(\pi-x)-\theta)\left(\rho(\frac{\pi}{2})-\rho_1(x)\right)\\ &+\frac{\sigma^- m\sin\theta}{\mu}\sin\mu(\pi-x)+\frac{\sigma^+ m\sin\theta}{\mu}\sin\mu x+o\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\,\tau|x}}{\mu}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{2,1}(x,\mu) &= -\sigma^+\cos(\mu x-\theta)\rho(x)+\sigma^-\cos(\mu(\pi-x)-\theta)\left(\rho(\frac{\pi}{2})-\rho_1(x)\right)\\ &-\frac{\sigma^- m\sin\theta}{\mu}\sin\mu(\pi-x)-\frac{\sigma^+ m\cos\theta}{\mu}\sin\mu x+o\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\,\tau|x}}{\mu}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_{1,2}(x,\mu) &= -\sigma^+ \cos\left(\mu x-\theta\right)\frac{\rho^2(x)}{2!} \\
&\quad -\sigma^- \cos\left(\mu(\pi-x)-\theta\right)\frac{\left(\rho(\frac{\pi}{2})-\rho_1(x)\right)^2}{2!} - \frac{\sigma^+ m\sin\theta}{\mu}\cos\mu x\rho(x) \\
&\quad -\frac{\sigma^- m\sin\theta}{\mu}\cos\mu(\pi-x)\left(\rho(\frac{\pi}{2})-\rho_1(x)\right) + \frac{\sigma^+ m^2 x}{\mu}\sin\left(\mu x-\theta\right) \\
&\quad +\frac{\sigma^- m^2}{2\mu}\left(\pi-x\right)\sin(\mu(\pi-x)-\theta) + o\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\,\tau|x}}{\mu}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_{2,2}(x,\mu) &= -\sigma^+ \sin\left(\mu x-\theta\right)\frac{\rho^2(x)}{2!} \\
&\quad +\sigma^- \sin\left(\mu(\pi-x)-\theta\right)\frac{\left(\rho(\frac{\pi}{2})-\rho_1(x)\right)^2}{2!} + \frac{\sigma^+ m\cos\theta}{\mu}\cos\mu x\rho(x) \\
&\quad +\frac{\sigma^- m\sin\theta}{\mu}\cos\mu(\pi-x)\left(\rho(\frac{\pi}{2})-\rho_1(x)\right) - \frac{\sigma^+ m^2 x}{2\mu}\cos\left(\mu x-\theta\right) \\
&\quad -\frac{\sigma^- m^2}{2\mu}\left(\pi-x\right)\cos(\mu(\pi-x)-\theta) + o\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\,\tau|x}}{\mu}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_{1,3}(x,\mu) &= -\sigma^+ \sin\left(\mu x-\theta\right)\frac{\rho^3(x)}{3!} \\
&\quad +\sigma^- \sin\left(\mu(\pi-x)-\theta\right)\frac{\left(\rho(\frac{\pi}{2})-\rho_1(x)\right)^3}{3!} - \frac{\sigma^+ m\sin\theta}{\mu}\sin\mu x\frac{\rho^2(x)}{2!} \\
&\quad -\frac{\sigma^- m\sin\theta}{\mu}\sin\mu(\pi-x)\frac{\left(\rho(\frac{\pi}{2})-\rho_1(x)\right)^2}{2!} - \frac{\sigma^+ m^2 x}{2\mu}\cos\left(\mu x-\theta\right)\rho(x) \\
&\quad -\frac{\sigma^- m^2}{2\mu}\left(\pi-x\right)\cos(\mu(\pi-x)-\theta)\left(\rho(\frac{\pi}{2})-\rho_1(x)\right) \\
&\quad +o\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\,\tau|x}}{\mu}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_{2,3}(x,\mu) &= \sigma^{+}\cos\left(\mu x-\theta\right)\frac{\rho^{3}(x)}{3!} \\
&-\sigma^{-}\cos\left(\mu(\pi-x)-\theta\right)\frac{\left(\rho(\frac{\pi}{2})-\rho_{1}(x)\right)^{3}}{3!}+\frac{\sigma^{+}m\cos\theta}{\mu}\sin\mu x\frac{\rho^{2}(x)}{2!} \\
&+\frac{\sigma^{-}m\sin\theta}{\mu}\sin\mu(\pi-x)\frac{\left(\rho(\frac{\pi}{2})-\rho_{1}(x)\right)^{2}}{2!}-\frac{\sigma^{+}m^{2}x}{2\mu}\sin\left(\mu x-\theta\right)\rho(x) \\
&+\frac{\sigma^{-}m^{2}}{2\mu}\left(\pi-x\right)\sin(\mu(\pi-x)-\theta)\left(\rho(\frac{\pi}{2})-\rho_{1}(x)\right) \\
&+o\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\,\tau|x}}{\mu}\right)
\end{aligned}
$$

denklemlerini elde ederiz. Bu şekilde hesaplamaya devam edersek $n\geq 1$ için

$$
\begin{aligned}
\varphi_{1,2n}(x,\mu) &= (-1)^{n}\sigma^{+}\cos\left(\mu x-\theta\right)\frac{\rho^{2n}(x)}{(2n)!} \\
&+(-1)^{n}\sigma\cos\left(\mu(\pi-x)-\theta\right)\frac{\left(\rho(\frac{\pi}{2})-\rho_{1}(x)\right)^{2n}}{(2n)!} \\
&+(-1)^{n}\frac{\sigma^{+}m\sin\theta}{\mu}\cos\mu x\frac{\rho^{2n-1}(x)}{(2n-1)!} \\
&+(-1)^{n}\frac{\sigma^{-}m\sin\theta}{\mu}\cos\mu(\pi-x)\frac{\left(\rho(\frac{\pi}{2})-\rho_{1}(x)\right)^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
&-(-1)^{n}\frac{\sigma^{+}m^{2}x}{2\mu}\sin\left(\mu x-\theta\right)\frac{\rho^{2n-2}(x)}{(2n-2)!} \\
&-(-1)^{n}\frac{\sigma^{-}m^{2}}{2\mu}\left(\pi-x\right)\sin(\mu(\pi-x)-\theta)\frac{\left(\rho(\frac{\pi}{2})-\rho_{1}(x)\right)^{2n-2}}{(2n-2)!} \\
&+o(\frac{e^{|\tau|x}}{\mu})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_{1,2n+1}(x,\mu) &= (-1)^n\sigma^+\sin(\mu x-\theta)\,\frac{\rho^{2n+1}(x)}{(2n+1)!} \\
&+(-1)^{n+1}\sigma\sin(\mu(\pi-x)-\theta)\,\frac{\left(\rho(\frac{\pi}{2})-\rho_1(x)\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&+(-1)^n\frac{\sigma^+ m\sin\theta}{\mu}\sin\mu x\frac{\rho^{2n}(x)}{(2n)!} \\
&+(-1)^n\frac{\sigma^- m\sin\theta}{\mu}\sin\mu(\pi-x)\frac{\left(\rho(\frac{\pi}{2})-\rho_1(x)\right)^{2n}}{(2n)!} \\
&+(-1)^n\frac{\sigma^+ m^2 x}{2\mu}\cos(\mu x-\theta)\,\frac{\rho^{2n-1}(x)}{(2n-1)!} \\
&+(-1)^n\frac{\sigma^- m^2}{2\mu}(\pi-x)\cos(\mu(\pi-x)-\theta)\frac{\left(\rho(\frac{\pi}{2})-\rho_1(x)\right)^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
&+o(\frac{e^{|\tau|x}}{\mu})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_{2,2n}(x,\mu) &= (-1)^n\sigma^+\sin(\mu x-\theta)\,\frac{\rho^{2n}(x)}{(2n)!} \\
&+(-1)^{n+1}\sigma^-\sin(\mu(\pi-x)-\theta)\,\frac{\left(\rho(\frac{\pi}{2})-\rho_1(x)\right)^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
&+(-1)^{n+1}\frac{\sigma^+ m\cos\theta}{\mu}\cos\mu x\frac{\rho^{2n-1}(x)}{(2n-1)!} \\
&+(-1)^{n+1}\frac{\sigma^- m\sin\theta}{\mu}\cos\mu(\pi-x)\frac{\left(\rho(\frac{\pi}{2})-\rho_1(x)\right)^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
&+(-1)^n\frac{\sigma^+ m^2 x}{2\mu}\cos(\mu x-\theta)\,\frac{\rho^{2n-2}(x)}{(2n-2)!} \\
&+(-1)^n\frac{\sigma^- m^2}{2\mu}(\pi-x)\cos(\mu(\pi-x)-\theta)\frac{\left(\rho(\frac{\pi}{2})-\rho_1(x)\right)^{2n-2}}{(2n-2)!} \\
&+o\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\,\tau|x}}{\mu}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_{2,2n+1}(x,\mu) \;=\; & (-1)^{n+1}\sigma^{+}\cos\left(\mu x-\theta\right)\frac{\rho^{2n+1}(x)}{(2n+1)!} \\
& +(-1)^{n}\cos\left(\mu(\pi-x)-\theta\right)\frac{\left(\rho(\frac{\pi}{2})-\rho_1(x)\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
& +(-1)^{n+1}\frac{\sigma^{+}m\cos\theta}{2\mu}\sin\mu x\frac{\rho^{2n}(x)}{(2n)!} \\
& +(-1)^{n+1}\frac{\sigma^{-}m\sin\theta}{\mu}\cos\mu(\pi-x)\frac{\left(\rho(\frac{\pi}{2})-\rho_1(x)\right)^{2n}}{(2n)!} \\
& +(-1)^{n}\frac{\sigma^{+}m^2x}{2\mu}\sin\left(\mu x-\theta\right)\frac{\rho^{2n-1}(x)}{(2n-1)!} \\
& +(-1)^{n+1}\frac{\sigma^{-}m^2}{\mu}\left(\pi-x\right)\sin(\mu(\pi-x)-\theta)\frac{\left(\rho(\frac{\pi}{2})-\rho_1(x)\right)^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
& +o\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\,\tau|x}}{\mu}\right)
\end{aligned}
$$

bulunmuş olur. Burada, $\rho_1(x)=\rho(x)-\rho(\dfrac{\pi}{2})$. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

KAYNAKLAR

P.J. Browne, B.D. Sleeman, Inverse nodal problem for Sturm–Liouville equation with eigenparameter depend boundary conditions, Inverse Problems 12 (1996), pp. 377–381,.

S.A. Buterin, C.T. Shieh, Inverse nodal problem for differential pencils, Appl. Math. Lett. 22, (2009), pp. 1240–1247.

S.A. Buterin, C.T. Shieh, Incomplete inverse spectral and nodal problems for differential pencil. Results Math. 62, (2012), 167-179

S.A. Buterin, On an Inverse Spectral Problem for a Convolution Integro-Differential Operator, Results in Mathematics,50, (2007), 173-181.

S.A. Buterin, The Inverse Problem of Recovering the Volterra Convolution Operator from the Incomplete Spectrum of its Rank-One Perturbation, Inverse Problems, 22, (2006), 2223–2236.

Y.H. Cheng, C-K. Law and J. Tsay, Remarks on a new inverse nodal problem, J. Math. Anal. Appl. 248 (2000), pp. 145–155.

G. Freiling, V.A. Yurko, Inverse Sturm–Liouville Problems and their Applications, Nova Science, New York, 2001.

Y. Guo, Y. Wei, Inverse Nodal Problem for Dirac Equations with Boundary Conditions Polynomially Dependent on the Spectral Parameter, Results. Math. 67 (2015), 95–110.

O.H. Hald, J.R. McLaughlin, Solutions of inverse nodal problems, Inv. Prob. 5 (1989), pp. 307–347.

B. Keskin A. S. Ozkan, Inverse nodal problems for Dirac-type integro-differential operators, J. Differential Equations. 263 (2017), 8838–8847

B. Keskin, H. D. Tel, Reconstruction of the Dirac-Type Integro-Differential Operator From Nodal Data, Numerical Functional Analysis and Optimization, (2018),

Y.V. Kuryshova, C.T. Shieh, An Inverse Nodal Problem for Integro-Differential Operators, Journal of Inverse and III-posed Problems, 18, (2010), 357–369.

Y.V. Kuryshova, Inverse Spectral Problem for Integro-Differential Operators, Mathematical Notes, 81(6), (2007), 767-777.

B.Wu, J. Yu, Uniqueness of an Inverse Problem for an Integro-Differential Equation Related to the Basset Problem, Boundary Value Problems, 229, (2014).

J.R. McLaughlin, Inverse spectral theory using nodal points as data – a uniqueness result, J. Diff. Eq. 73 (1988), pp. 354–362.

C.K. Law, C.L. Shen and C.F. Yang, The Inverse Nodal Problem on the Smoothness of the Potential Function, Inverse Problems, 15(1), (1999), 253-263 (Erratum, Inverse Problems, 17, (2001), 361-363).

A.S. Ozkan, B. Keskin, Inverse Nodal Problems for Sturm–Liouville Equation with EigenparameterDependent Boundary and Jump Conditions, Inverse Problems in Science and Engineering, 23:8, (2015), 1306-1312.

C-T Shieh, V.A. Yurko, Inverse nodal and inverse spectral problems for discontinuous boundary value problems, J. Math. Anal. Appl. 347 (2008) 266-272.

X-F Yang, A solution of the nodal problem, Inverse Problems, 13, (1997) 203-213.

C-F Yang, Z-Y.Huang, Reconstruction of the Dirac operator from nodal data. Integr. Equ. Oper. Theory 66, (2010) 539–551.

C-F Yang, Xiao-Ping Yang, Inverse nodal problems for the Sturm-Liouville equation with polynomially dependent on the eigenparameter, Inverse Problems in Science and Engineering, 19(7), (2011), 951-961.

C-F Yang, Inverse nodal problems of discontinuous Sturm–Liouville operator, J. Differential Equations, 254, (2013) 1992–2014.

C-F Yang, V.N. Pivovarchik, : Inverse nodal problem for Dirac system with spectral parameter in boundary conditions. Complex Anal. Oper. Theory 7, (2013) 1211–1230.