



**SEKİZİNCİ SINIF ÖĞRENCİLERİNİN GENELLEME
SÜREÇLERİNE İLİŞKİN DÜŞÜNME VE ANLAMA YOLLARININ
BELİRLENMESİ: DNR TABANLI BİR ÖĞRETİM DENEYİ**

Gülçin Oflaz

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ŞUBAT, 2017

TELİF HAKKI VE TEZ FOTOKOPİ İZİN FORMU

Bu tezin tüm hakları saklıdır. Kaynak göstermek koşuluyla tezin teslim tarihinden itibaren on iki (12) ay sonra tezden fotokopi çekilebilir.

YAZARIN

Adı : Gülçin
Soyadı : OFLAZ
Bölümü : Matematik Eğitimi
İmza :
Teslim tarihi : 08.03.2017

TEZİN

Türkçe Adı: Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Genelleme Süreçlerine İlişkin Düşünme ve Anlama Yollarının Belirlenmesi: DNR Tabanlı Bir Öğretim Deneyi

İngilizce Adı: Determining The 8th Graders Ways Of Thinking and Ways Of Understanding Related To Generalisation: A DNR Based Teaching Experiment

ETİK İLKELERE UYGUNLUK BEYANI

Tez yazma sürecinde bilimsel ve etik ilkelere uyduğumu, yararlandığım tüm kaynakları kaynak gösterme ilkelerine uygun olarak kaynakçada belirttiğimi ve bu bölümler dışındaki tüm ifadelerin şahsıma ait olduğunu beyan ederim.

Yazar Adı Soyadı: Gülçin OFLAZ

İmza:

JÜRİ ONAY SAYFASI

Gülçin OFLAZ tarafından hazırlanan “Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Genelleme Süreçlerine İlişkin Düşünme Ve Anlama Yollarının Belirlenmesi: DNR Tabanlı Bir Öğretim Deneyi” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı’nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Dursun SOYLU

İlköğretim Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi)

İkinci Danışman: Yrd. Doç. Dr. Handan DEMİRCİOĞLU

İlköğretim Anabilim Dalı, Cumhuriyet Üniversitesi)

Başkan: Prof. Dr. Serif MİRASYEDİOĞLU
Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Üye: Prof. Dr. Yusuf YAYLI
Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Üye: Yrd. Doç. Dr. Hasan ES
Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Üye: Yrd. Doç. Dr. Mustafa KALE
Temel Eğitim Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Üye: Yrd. Doç. Dr. Mine AKTAŞ
Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 22.02.2017

Bu tezin Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı’nda Doktora tezi olması için şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. Ülkü ESER ÜNALDI
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürü



Nil'e

TEŞEKKÜR

Kıymetli “İmparator” hocam Yrd. Doç. Dr. Dursun SOYLU; Gazi Üniversitesi’nde başladığım ilk günden beri yardımınızı esirgemediğiniz için, her ihtiyacım olduğunda destek olduğunuz için ve sorularıma içtenlikle yanıt verip bana yol gösterdiğiniz için çok teşekkür ederim.

Kıymetli hocam Yrd. Doç. Dr. Handan DEMİRCİOĞLU; danışmanım olmadan önce de danışmanım olduktan sonra da aklıma takılan her sorum için büyük bir özveriyle bana zaman ayırdınız. Sizinle yaptığımız matematiksel sohbetlerimizden çok keyif aldım ve çok şey öğrendim. Kapınızı her çaldığımda güler yüzlü, sevecen tavrınız için çok teşekkür ederim.

Kıymetli hocalarım Prof. Dr. Şeref MİRASYEDİOĞLU’na, Yrd. Doç. Dr. Mine AKTAŞ’a, Prof. Dr. Yusuf YAYLI’ya, Yrd. Doç. Dr. Hasan ES’e, Yrd. Doç. Dr. Mustafa KALE’ye zaman ayırdıkları için ve değerli önerileri için çok teşekkür ederim. DNR’nin ne olduğunu anlamaya çalıştığım dönemde zaman ayırma nezaketi göstererek bütün sorularıma cevap veren ve bu tezin şekillenmesinde katkıları olan Guershon HAREL ve Kien LIM’e minnettarım.

Tezimin uygulama aşamasındaki katkılarını asla unutmayacağım değerli arkadaşım Mustafa Ağâh CEYLAN’a çok teşekkür ederim. Aslında en büyük teşekkürü büyük bir özveriyle ve sabırla öğretim deneylerine katılan 9 küçük kalp hak ediyor. Uygulamamı yürüttüğüm okul yönetimine de ayrıca teşekkürlerimi sunarım.

Fikirlerine her zaman güvendiğim ve zor zamanlarda yardımını esirgemeyen kıymetli arkadaşım Yrd. Doç. Dr. Serkan BULDUR’a teşekkür ederim. İyi ve kötü zamanları birlikte paylaştığımız canım arkadaşlarım Duygu, Gülseda, İclal ve Kübra; seviyorum sizi. Bütün öğrenim hayatım boyunca bende iz bırakan bütün hocalarıma, burada adlarını sayamadığım çok değerli arkadaşlarıma teşekkürlerimi bildiririm.

Ve tabi ki canım ailem... Hiçbir koşulda desteğinizi esirgemediniz ve bugüne gelmemi sağladınız. Sevgili annem, babam ve abim; teşekkür etmek az kalır. Seviyorum sizi. Sevgili yol arkadaşım Gökhan, desteğin ve koşulsuz sevgin için teşekkür ederim. Güzel kızım Nil, değeri insanlık için küçük ama benim için büyük olan bu tezi sana ithaf ediyorum. Umarım sen, değeri insanlık için de büyük olan çalışmalar yaparsın.

Ayrıca yüksek lisans ve doktora çalışmalarımı destekleyen TÜBİTAK’a teşekkür ederim.

Gülçin OFLAZ

**SEKİZİNCİ SINIF ÖĞRENCİLERİNİN GENELLEME
SÜREÇLERİNE İLİŞKİN DÜŞÜNME VE ANLAMA YOLLARININ
BELİRLENMESİ: DNR TABANLI BİR ÖĞRETİM DENEYİ
(Doktora Tezi)**

**Gülçin OFLAZ
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Şubat, 2017**

ÖZ

Matematik bilgisi, işlemsel ve kavramsal olmak üzere iki tür bilgiden oluşmaktadır. İşlemsel bilgi, sayılar üzerinden yürütülen işlemlerin bilgisi; kavramsal bilgi ise cebirsel yapılar, ifadeler üzerinden yürütülen bilgidir (Kieran, 1992; Sfard, 1991). Araştırmacılar tarafından farklı şekillerde adlandırılrsa da matematik bilgisinin bu ikili yapısına vurgu yapılmaktadır. Harel (2008a) zihinsel eylemlerimizin düşünme ve anlama yollarından oluştuğunu belirtmektedir. Zihnimizde gerçekleşen her türlü eylem, zihinsel eylemlerimiz olarak adlandırılmaktadır. Zihinsel eylemlerimizin karakteristiklerini düşünme yolları, zihinsel eylemlerimiz sonucu ortaya konan ürünler ise anlama yollarını oluşturmaktadırlar. DNR tabanlı öğretim, kısaca DNR, çeşitli öğrenme ve öğretme teorilerini temele alarak matematiği, matematik öğrenimini ve öğretimini açıklamaktadır. DNR; duality, necessity, repeated reasoning kelimelerinin baş harflerinden oluşan bir kısaltmadır. Bu çalışmada sekizinci sınıf öğrencilerinin genelleme süreçlerine ilişkin düşünme ve anlama yollarının ve öğrencilerin DNR tabanlı öğretime ilişkin görüşlerinin belirlenmesi amaçlanmıştır. İlgili alan yazın incelendiğinde öğrencilerin genelleme stratejilerini belirleyen çalışmalara rastlanabilir. Bu stratejilerden farklı olarak bu çalışmada öğrenen merkezli transfer temele alarak, Ellis (2004) tarafından geliştirilen genelleme taksonomisi kullanılmıştır. Öğrenen merkezli transfer, bireyin zihninde olup bitenleri merkeze aldığından, genelleme çalışmalarını araştırmacı perspektifinden öğrenen perspektifine yükseltmektedir. Öğrencilerin genelleme süreçlerine ilişkin düşünme ve anlama yollarının belirlenmesi için DNR tabanlı bir öğretim deneyi geliştirilmiş ve uygulanmıştır. Çalışmanın katılımcıları, araştırmacı tarafından hazırlanan işlemsel ve kavramsal cebir testlerinden iyi ve orta düzeyde not alan öğrenciler tarafından seçilmiştir. Buna göre öğretim deneyi, 9 tane

sekizinci sınıf öğrencisiyle yürütülmüştür. Öğretim deneyi örüntü ve ilişkiler, değişimin analizi ve denklemler konularını kapsayan 37 görevden oluşmaktadır. Uygulama, 1 hafta ön uygulama ve 6 hafta öğretim deneyi olmak üzere 7 hafta sürmüştür. Veriler her oturumda sınıfı kaydeden bir kamera ve grupları ayrı ayrı kaydeden 3 kamera olmak üzere 4 kamera kaydı, her oturumdan sonra 2 öğrenciyle o günün sonunda verilen ödevlerin birebir çalışıldığı kamera kayıtları, öğrencilerin çalışma kâğıtları, öğrenci günlükleri, araştırmacı ve öğretmen günlüklerinden oluşmaktadır. Veriler sürekli analiz ve geriye dönük analiz tekniği ile çözümlenmiştir. Araştırmanın sonuçlarına göre öğrencilerin genelleme yaparken ortaya koydukları düşünme yolları, genelleme taksonomisinde açıklanan ilişkilendirme, araştırma ve genişletme kategoriyle benzerlik göstermektedir. Taksonomide bulunmayan ancak bu çalışmada öğrenciler tarafından *otorite ile ilişkilendirme* ve *aynı parça araştırma* eylemlerinin de gerçekleştirildiği gözlemlenmiştir. Bu sebepten bu iki kategorinin taksonomiye eklenmesi önerilmektedir. Öğrencilerin ortaya koydukları anlama yolları ise taksonomide bulunan yansıma genellemeleri ile benzerlik göstermektedir. Çalışmanın sonucunda öğrencilerin genelleme süreçlerine ilişkin bir model de önerilmektedir. Öğrencilerin DNR tabanlı öğretimle ilgili görüşleri ise çalışmada *ne* işlendiği, bu konuların *nasıl* öğretilmek istendiği ve sonunda öğrencide *hangi* becerilerin geliştirilmek istendiği kategorileri altında toplanmaktadır.

Anahtar Kelimeler	: DNR tabanlı öğretim, genelleme taksonomisi, öğrenen merkezli transfer, öğretim deneyi
Sayfa Adedi	: 248
Danışman	: Yrd. Doç. Dr. Dursun SOYLU
İkinci Danışman	: Yrd. Doç. Dr. Handan DEMİRCİOĞLU

**DETERMINING THE 8th GRADERS WAYS OF THINKING AND
WAYS OF UNDERSTANDING RELATED TO GENERALISATION: A
DNR BASED TEACHING EXPERIMENT
(Ph.D. Thesis)**

**Gülçin OFLAZ
GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF EDUCATIONAL SCIENCES
February, 2017**

ABSTRACT

Knowledge of mathematics consists of two kinds of knowledge which are operational and conceptual. Operational knowledge is the knowledge of operations which is made through numbers; and conceptual knowledge is the knowledge which is made through algebraic structures and expressions. (Kieran, 1992; Sfard, 1991). These two structures of mathematics knowledge are emphasized although they are called differently by the researchers. Harel (2008a) states that our mental acts consist of ways of thinking and understanding. Each act realized in our minds is called as our mental act. The characteristics of our mental acts form our ways of thinking, and the products appeared as a result of our mental acts form the ways of understanding. DNR based education, briefly DNR, explains mathematics, mathematics learning and teaching by grounding various learning and teaching theories. DNR is an abbreviation consisting of the words of duality, necessity, repeated reasoning. In this study, it was aimed at identifying the ways of thinking and understandings related to generalization process of 8th grade students and their opinions on DNR based education. When the related literature is reviewed, it can be seen that there are some studies determining students' generalization strategies. Different from those studies, in this study the generalization taxonomy of Ellis (2004) was used by grounding the actor oriented transfer. Actor oriented transfer, raises the generalization studies from researcher perspective to learner perspective as it centers the acts in mind. In order to identify the ways of understanding and thinking related to generalization process of students, a DNR based teaching experiment was developed and implemented. The participants of the study were selected among students who got high and medium level marks in the operational and conceptual algebra tests which were developed by the

researcher. The teaching experiment consists of 37 tasks including patterns and relations, analysis of change and equations. The experiment lasted 7 weeks one of which was pilot and 6 of which was the teaching experiment. The data consist of four video records (one record for the class in each session and 3 records for each group), the video records in which the assignments given at the end of the day were studied one-to one with 2 students, the worksheets of students, students journals, researcher and teacher journals. The data were analyzed with prospective and retrospective analysis. The findings showed that students' ways of thinking as generalizing showed similarity to the categories of relating, searching and extending explained in generalization taxonomy. It was observed that the acts of *relating with authority* and *searching the same piece*, which are not included in the taxonomy, were performed. Thus, it was suggested that these two categories be added to the taxonomy. The students' ways of understanding showed similarity to the reflection generalizations in the taxonomy. At the end of the study, a model on students' generalization process was proposed. On the other hand, the students' opinions on DNR based education were gathered under some categories which were *what* was studied in the study, *how* these subject were taught, and *which* skill was tried to be develop.

Key Words : DNR based instruction, generalization taxonomy, actor oriented transfer, teaching experiment
Page Number : 248
Supervisor : Assist. Prof. Dr. Dursun SOYLU
Co-supervisor : Assist. Prof. Dr. Handan DEMİRCİOĞLU

İÇİNDEKİLER

TELİF HAKKI VE TEZ FOTOKOPİ İZİN FORMU	i
ETİK İLKELERE UYGUNLUK BEYANI.....	ii
İTHAF	iv
TEŞEKKÜR.....	v
ÖZ	vi
ABSTRACT	viii
İÇİNDEKİLER.....	x
TABLolar LİSTESİ.....	xiv
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	xv
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	xvii
BÖLÜM 1.....	1
GİRİŞ.....	1
1.1. Problem Durumu	3
1.1.1. DNR Tabanlı Öğretim	5
1.1.2. Cebirsel Düşünme	7
1.1.3. Genelleme	8
1.2. Araştırmanın Amacı.....	9
1.3. Araştırmanın Önemi	9
1.4. Varsayımlar	11
1.5. Sınırlılıklar.....	12
1.6. Tanımlar	12
BÖLÜM 2.....	13
KURAMSAL ÇERÇEVE	13
2.1. Cebir	13
2.2. Cebirin Tarihi.....	16
2.3. Cebirde Öğrencilerin Yaşadıkları Zorluklar	17
2.3.1.Cebirin Yapısı İle İlgili Öğrenci Zorlukları.....	18

2.3.2. Öğrencilerin Zihinsel Gelişimleri ve Hazırbulunuşluk Düzeyleri ile İlgili Öğrenci Zorlukları.....	19
2.3.3. Cebirin Öğretimindeki Eksiklikler ile İlgili Öğrenci Zorlukları.....	21
2.4.Cebir Öğretimi	23
2.5. Cebirsel Düşünme	28
2.5.1. Cebirsel Düşünmenin Gelişimi.....	30
2.5.1.1. Piaget'ye Göre Cebirsel Düşünmenin Gelişimi.....	30
2.5.1.2. Vygotsky'e Göre Cebirsel Düşünmenin Gelişimi.....	31
2.5.2.Cebirsel Düşünme Becerileri.....	34
2.6.Genelleme.....	35
2.6.1.Genelleme Sürecinin Gelişimi	36
2.6.2.Genellenmenin Sınıflandırılması.....	38
2.6.3.Genellenmenin Düşünme Yolları	39
2.6.3.1.Yinelemeli düşünme	39
2.6.3.2.Belirgin düşünme	40
2.6.3.3.Görsel düşünme	40
2.6.3.4.Sayısal düşünme	41
2.6.3.5.Pragmatik düşünme.....	42
2.6.4.Düşünme Yolları Olarak 'Genelleme Eylemleri'	43
2.6.4.1.İlişkilendirme	43
2.6.4.2.Araştırma	44
2.6.4.3.Genişletme.....	45
2.6.5.Anlama Yolları Olarak 'Yansıma Genellemeleri'	45
2.6.5.1.Açıklama ya da İfade Etme	45
2.6.5.2.Tanımlar.....	46
2.6.5.3.Etki	46
2.7.DNR Tabanlı Öğretim	47
2.7.1.DNR'nin Felsefesi.....	47
2.7.2.DNR' nin Temel Öğretim İlkeleri.....	50
2.7.2.1.Etkileşim.....	51
2.7.2.2.Gereklilik.....	52
2.7.2.3.Muhakeme	53
2.7.3.DNR' nin Kavramları	54
2.7.3.1.Zihinsel Eylemler.....	54
2.7.3.2.Düşünme yolları ve anlama yolları.....	54

BÖLÜM 3	57
YÖNTEM	57
3.1. Tasarı Araştırmaları İçinde Öğretim Deneyi	57
3.2. Aşama I –Öğretime Hazırlık Süreci-	59
3.2.1. Gözlem ve Öğretim Deneyinin Oluşturulması	60
3.2.2.Katılımcıların Belirlenmesi	66
3.2.2.1. İşlemsel Cebir Testi	68
3.2.2.2.Kavramsal Cebir Testi	68
3.3.Aşama II –Öğretim Süreci	70
3.3.1. Ön Uygulama	70
3.3.2. Öğretim Süreci	71
3.3.3. Görüşmeler	72
3.3.4. Sürekli Analiz	72
3.4.Veritoplama Araçları ve Veritoplama Süreci	72
3.5. Verilerin Analizi	74
3.6.Aşama III -Analiz Süreci	74
3.6.1.Geriye Dönük Analiz	74
3.7.Araştırmanın Geçerlik ve Güvenirliğinin Sağlanması	77
BÖLÜM 4	79
BULGULAR VE YORUMLAR	79
4.1. Öğrencilerin Genelleme Süreçlerine İlişkin Düşünme Yolları	79
4.1.1. Örüntüler ve İlişkiler İle İlgili Düşünme Yolları	80
4.1.2. Değişimin Analizine İlişkin Düşünme Yolları	100
4.1.3. Denklemlere İlişkin Düşünme Yolları	126
4.2. Öğrencilerin Genelleme Süreçlerine İlişkin Anlama Yolları	141
4.2.1. Açıklama ya da İfade Etme	141
4.2.1.1. Devam Eden Fenomenin Açıklanması	142
4.2.1.2. Benzerlik İfade Etme	142
4.2.1.3. Genel Prensip İfade Etme	145
4.2.2. Tanım	147
4.2.3. Etki	148
4.2.3.1. Önsel fikirlerin etkisi	148
4.2.3.2. Modifiye Edilmiş Fikir ya da Stratejiler	149
4.3. DNR Tabanlı Öğretime İlişkin Öğrenci Görüşleri	150

4.3.1. “Konular” Temasına İlişkin Öğrenci Görüşleri.....	151
4.3.2. “Farklılığı” Temasına İlişkin Öğrenci Görüşleri	153
4.3.3. “Katkıları” Temasına İlişkin Öğrenci Görüşleri	156
BÖLÜM 5.....	161
SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER	161
5.1. Öğrencilerin Genelleme Süreçlerine İlişkin Yeni Bir Model	162
5.2. Öğrencilerin Düşünme Yollarına İlişkin Sonuçlar; Genelleme Taksonomisinin <i>Otorite İle İlişkilendirme</i> ve <i>Aynı Parça Araştırma</i> Kategorilerinin Eklenmesi İle Yeniden Düzenlenmesi	165
5.3. Öğrencilerin Anlama Yollarına İlişkin Sonuçlar	168
5.4. Uygulanan DNR Tabanlı Öğretim Deneyine Dair Öğrenci Fikirleri.....	172
5.5. Öneriler	174
KAYNAKLAR.....	177
EKLER	197
Ek-1. Öğretim Deneyi	198
Ek-2. İşlemsel Cebir Testi	238
Ek-3. Kavramsal Cebir Testi	241
Ek-4. Öğrenci Günlüğü.....	245
Ek-5. Araştırmacı Öğretmen Günlüğü	246
Ek-6. Velilere Mektup.....	247
Ek-7. İzin Yazısı	248

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 1 <i>Görevlerin Konulara, Günlere, Haftalara Göre Dağılımı</i>	62
Tablo 2 <i>Katılımcıların Testlerden Aldıkları Puanlar</i>	67



ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1. Cebirde yaşanan öğrenci zorluklarının nedenleri.....	17
Şekil 2. Uygulanmakta olan 5-8. sınıflar cebir konularına, 2016-2017 öğretim yılında yürürlüğe giren 1-4. sınıflar cebir konularının entegre edilmesi	27
Şekil 3. Friel ve Markworth' un (2009) çalışmalarında öğrencilere sordukları soru	41
Şekil 4. Genelleme eyleminin düşünme ve anlama yolları	55
Şekil 5. Öğretim deneyi modelinin uygulama aşamaları	59
Şekil 6. Öğretim deneyinin oluşturulma süreci	60
Şekil 7. Düşünsel deney ve öğretim deneyi arasındaki döngüsel ilişki.....	61
Şekil 8. Veri toplama süreci	73
Şekil 9. Kamera kayıtlarının analiz süreci.....	75
Şekil 10. Oğuz'un çalışma kâğıdı.....	82
Şekil 11. Gül'ün çalışma kâğıdı	83
Şekil 12. Ali'nin çalışma kâğıdı	87
Şekil 13. Bartu'nun çalışma kâğıdı	88
Şekil 14. Ezgi'nin çözümü	91
Şekil 15. Bartu'nun çalışma kâğıdı	99
Şekil 16. Ali'nin çalışma kâğıdı	103
Şekil 17. Sezen'in çalışma kâğıdı.....	105
Şekil 18. Koray'ın çalışma kâğıdı	107
Şekil 19. Tahtaya çizilen grafik.....	108
Şekil 20. Sezen'in çalışma kâğıdı.....	113
Şekil 21. Gül'ün çalışma kâğıdı	113
Şekil 22. Sezen'in grafiği	114
Şekil 23. Koray'ın çalışma kâğıdı	114
Şekil 24. Melike'nin çalışma kâğıdı.....	120
Şekil 25. Oğuz'un çalışma kâğıdı.....	121
Şekil 26. Elif'in çalışma kâğıdı	121
Şekil 27. Bartu'nun çalışma kâğıdı	122
Şekil 28. Gül'ün çalışma kâğıdı	128

Şekil 29. Elif'in çalışma kâğıdı	132
Şekil 30. Ali'nin çizdiği şekil.....	133
Şekil 31. Bartu'nun çalışma kâğıdı	135
Şekil 32. Elif'in çalışma kâğıdı	137
Şekil 33. Ezgi'nin çalışma kâğıdı.....	139
Şekil 34. Melike'nin kâğıdı	140
Şekil 35. DNR tabanlı öğretim hakkında öğrenci görüşleri	151
Şekil 36. DNR tabanlı öğretim sürecinde öğrencilerin daha iyi öğrendikleri konular	152
Şekil 37. DNR tabanlı öğretimin okul derslerinden farklılıkları.....	153
Şekil 38. Öğrenci Gözünden DNR tabanlı öğretimin kendilerine katkıları	156
Şekil 39. Öğrencilerin genelleme süreçlerine dair yeni bir model	164
Şekil 40. Öğrencilerin genelleme süreçlerine ilişkin düşünme yolları.....	168
Şekil 41. Öğrencilerin genelleme süreci sonucunda ortaya koydukları anlama yolları	169

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

DNR	Duality, Necessity, Repeated Reasoning
MEB	Milli Eğitim Bakanlığı
NCTM	The National Council of Teachers of Mathematics



BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu bölümde araştırmanın problem durumu, araştırmanın amacı, araştırmanın önemi, problem cümlesi, alt problemler, araştırmanın varsayımları, araştırmanın sınırlılıkları ve tanımlara yer verilmiştir.

Son yıllarda eğitim alanında dünyada ve Türkiye’de yapılandırmacılık yaklaşımının hâkim olduğu, bu yaklaşımın öğrenme ve bilginin oluşturulması hakkındaki yönergelerinin eğitim alanında uygulandığı bilinmektedir. Piaget ve Vygotsky’nin öğrenmenin nasıl gerçekleştiği ile ilgili fikirleri, bilginin bireyin zihninde nasıl oluşturulduğuna dair yol göstericidir. Piaget’nin bilişsel yapılandırmacılığına göre öğrenme, bireyin yeni bilgiyle karşılaştığında zihninde dengesizlik meydana gelmesi sonucunda özümleme ve düzenleme süreçlerinin birbiri ardına yürütülerek zihnin denge durumuna ulaşmasıdır. Zihinde meydana gelen denge- dengesizlik- dengeleme süreçleri sonucunda oluşturulan matematiksel bilginin ikili yapısından bahsetmek mümkündür. Pek çok araştırmacı -farklı adlandırmalar kullansalar da- matematik bilgisinin işlemsel ve kavramsal yönüne vurgu yapmaktadırlar (Hiebert & Lefevre, 1986; Sfard, 1991; Skemp, 1976). Buradan hareketle matematiksel bilginin ve dolayısıyla matematiğin aksiyomlar, tanımlar, teoremler gibi konu alanlarından ve bu bilgilere ulaşmak için zihnimizde gerçekleşen eylemlerin özellikleri olan kavramsal araçlardan oluştuğunu söylemek mümkündür (Harel, 2008a). O halde matematik eğitimi bahsedilen bu iki bilgi türünün, işlemsel ve kavramsal bilginin gelişimini amaçlamalıdır. Ancak günümüzde okullarda uygulanan matematik öğretiminde işlemsel bilginin gelişimine ağırlık verildiği, kavramsal bilginin ihmal edildiği bilinmektedir.

Matematik eğitimcileri öğrencilerin nasıl daha iyi öğrenecekleri üzerinde çalışmakta ve çeşitli yaklaşımlar ortaya koymaktadırlar. Bu yaklaşımlardan biri olan DNR tabanlı öğretim, okullarda öğretilecek matematiğin, nasıl öğretilmesi gerektiği gibi sorulara cevap arayan bir yaklaşımdır. Matematik eğitimi, zihinsel eylemlerimizin düşünme ve anlama

yollarını geliştirme amacını taşımalıdır. Dolayısıyla okullarda öğretilecek olan matematik, matematiksel bilginin ikili yapısının gelişmesini sağlayacak konulardan oluşmalıdır ki bu, etkileşim (D) ile temsil edilmektedir. Bu bilgileri nasıl öğretmeli sorusunun cevabı, gereklilik (N) ve muhakeme (R) prensiplerinde saklıdır. Öğrenmenin gerçekleşmesi için zihinde dengesizlik meydana gelmesi gerekmektedir. O halde öğrencilerin karşılaştıkları problem durumları, onların zihinsel ihtiyaçlarını karşılayacak şekilde ve aynı zamanda çözmek için istek duyacakları şekilde oluşturulmalıdır. Öğrencilerde istendik anlama ve düşünme yolları geliştirildikten sonra bu bilgilerin muhakeme edilerek kalıcı hale getirilmesi gerekmektedir.

“Bir bilgiyi öğrenmek demek o bilgiyi kullanmak demektir” der Piaget (Piaget, 1964, s. 20). Buradan hareketle matematik öğrenmek, edinilen matematiksel bilgiyi kullanmayı ve dolayısıyla matematiksel düşünmenin geliştirilmesini gerektirmektedir. Matematiksel düşünme birbirinden kesin çizgilerle ayrılmayan ve birbirleriyle ilgili olan birçok düşünme şeklini içermektedir: geometrik düşünme, fonksiyonel düşünme, cebirsel düşünme gibi.

Cebirsel düşünme örüntüleri tanıma, sayılar, objeler ve geometrik şekiller arasındaki matematiksel ilişkileri inceleme ile ilgili olduğundan matematiksel düşünmenin temelini oluşturmaktadır (Windsor, 2009). Çoklu temsiller şeklinde verilen örüntüleri fark etme; örüntüyü oluşturan kuralı ifade etme ve bu kuralı sembollerle ifade etmeyi gerektiren cebirsel düşünme (Booker, 2009), cebir çalışmalarıyla sınırlı olmamakla birlikte (Akkan, 2016, s. 44) cebir çalışmalarından oldukça etkilenmektedir.

Zengin ilişkiler ağı kurmaya yardımcı olan cebir (Kaput, 2000) genelleştirilmiş aritmetikten çok daha fazlasıdır; problem çözmenin bir aracı, ilişkileri tanımlayıp analiz etmenin bir yolu, matematiksel yapıları anlayıp karakterize etmenin anahtarı olarak düşünülebilir. Dolayısıyla cebir öğretiminin okul matematiğindeki önemi tartışmaya açık değildir (Usiskin, 1988). Matematiğin ham maddesi sayılar ve uzaydır. Matematiksel kavramlar da deneyimlerimizin benzerliklerinden, farklılıklarından, tekrarlanmasından ve diğer ilişkilerinden doğmaktadır. Cebir de bu alanlarda daha ileri soyutlamalar yapmamız için kullanılacak kavramsal araçları içerir. Bu kavramsal araçlar sınıflama, karşılaştırma, dönüştürme, genellemedir (Bell, 1996). Çocuğun genelleme yeteneğini ve cebirsel kavramlarını geliştirme, öğretim programlarının birincil amacıdır (Davydov, 1990). Genelleme, öğrencilerin sembolleri anlamlandırmalarını sağlar ve aritmetikteki ön bilgileri ile ilişkileri kurabilmelerine yardımcı olur (Lannin, 2005, s. 233). Alan yazın

incelendiğinde öğrencilerin genelleme yaparken kullandıkları stratejileri belirleyen pek çok çalışma olduğu görülebilir (Orton & Orton,1999; Sasman, Linchevski & Olivier, 1999).

Öğrenci ve öğrencinin bilgiyi oluşturma süreci merkeze alındığına göre öğrencilerin genelleme süreçlerini incelerken de onların zihninde neler olup bittiğini anlamaya çalışılmalıdır. Alan yazında belirlenen genelleme stratejileri, öğrencilerin genelleme süreçlerini araştırmacı perspektifinden ele almaktadır. Ellis (2004), öğrenen odaklı transfer (*actor oriented transfer*) yaklaşımını temele alarak öğrencilerin genelleme süreçlerini incelemiş ve süreci öğrenci perspektifinden yorumlamıştır. Ayrıca genelleme eylemini matematiğin yapısına uygun olarak süreç ve ürün olarak ele almış, genelleme taksonomisini ortaya koymuştur. Bu çalışmada, öğrencilerin genelleme süreçlerinin analizinde belirlenen genelleme taksonomisi kullanılacaktır.

Genelleme taksonomisinin temelinde Lobato'nun (2003) öğrenen odaklı transfer yaklaşımı vardır. Öğrenen odaklı transfer, öğrencinin karşılaştığı bilgiyle zihninde var olan bilgisi arasında nasıl benzerlik kurduğunu açıklamaktadır. Dolayısıyla öğrencinin zihninde olup bitenler, araştırmacının odağındadır. Fakat öğrencinin zihninde gerçekleşen öğrenme sürecini analiz etmek zordur. Ancak son yıllarda matematik eğitimi araştırmalarında daha çok tercih edilen, ülkemizde yapılan çalışmalarda da örneklerine rastlanan tasarı deneylerinde gerçekleştirilen eylemler, öğrencinin zihninde neler olup bittiğine dair önemli ipuçları verebilmektedir (Lobato, 2003). Bu çalışmada da öğrencilerin genelleme süreçlerini öğrenci perspektifinden incelemek amacıyla bir öğretim deneyi tasarlanmış ve öğrencilerin genelleme eylemine ilişkin düşünme ve anlama yolları ortaya konmuştur. Ayrıca süreç boyunca öğrencilerde meydana gelen değişim ve gelişim de gözlemlenmiştir.

1.1. Problem Durumu

Öğrenme ve öğretme sürecinin nasıl gerçekleştiği konusunda çeşitli öğretim yaklaşımları bulunmaktadır. Bu konu ile ilgili olarak her yaklaşım kendi fikrini ortaya koymaktadır. Örneğin; davranışçı yaklaşımlara göre öğrenme, uyarıcılarla davranışlar arasında bağ kurma süreci olarak tanımlanmakta; gözlenebilir ve ölçülebilir davranışlar üzerinde yoğunlaşmaktadır. Dolayısıyla bu süreçte öğrencinin zihinsel etkinliklerine birinci derecede önem verilmemektedir (Bacanlı, 2009). Oysa yapılandırmacı (oluşturmacı) yaklaşım, öğrenenin zihninde neler olup bittiği ile ilgilenmektedir. Bilgi ve öğrenme ile ilgili felsefeyi açıklayan yapılandırmacılık, bilginin bireyde nasıl oluşturulacağı ile ilgili

fikirler vermektedir. Piaget çalışmalarıyla bilişsel yapılandırmacılığa, Vygotsky ise sosyal yapılandırmacılığa yön vermişlerdir. Piaget 'ye göre bireyin zihninde bilişsel yapılar yani şemalar bulunmaktadır. Birey yeni bir bilgiyle karşılaştığında bu bilgiyi zihnindeki mevcut şemanın içine almakta, böylece özümleme gerçekleşmektedir. Ancak yeni bilgiyle eski bilgi birbiriyle uyuşmayacağı için bireyin zihninde dengesizlik meydana gelmektedir. Böylece zihnin yeniden denge durumuna kavuşması için mevcut şemayı, yeni şemayla uyumlu hale getirmesi gerekmektedir. Yani mevcut şemasında çeşitli düzenlemeler yapmaktadır. Düzenleme sonucunda yeni şemasını oluşturan zihin, denge durumuna ulaşmaktadır. Piaget 'ye göre öğrenmenin gerçekleşebilmesi için zihinde dengesizlik durumunun meydana gelmesi gerekmektedir. Birey, yeni bilgisini mevcut şemasıyla ilişkilendireceği için öğrenmenin gerçekleşebilmesi için öğrencide olabildiği kadar çok şema oluşturmak gerekmektedir. Öyle ki öğrenci, yeni bilgisini ilişkilendirebileceği bir şema bulabilsin. Örneğin bir elma yediğimizde, vücut elmanın faydalı kısımlarını kullanmakta, geri kalan kısımlarını ise vücuttan uzaklaştırmaktadır (von Glasersfeld, 1995, s. 63). Öğrenme de benzer şekilde düşünülebilir. Yeni öğrenilecek bilgi, zihnimizde ilişki kurup üzerine temelleneceği şema bulduğu sürece bilişsel mekanizmamız tarafından kullanılacaktır. Geri kalan kısım ise atılacaktır. Piaget, bilginin önce bireyin zihninde oluşturulduğunu, sonra ise sosyal olarak oluşturulduğunu iddia etmektedir. Vygotsky ise bunun tersini iddia etmektedir; bilgi önce sosyal olarak, sonra da bireyin zihninde oluşturulmaktadır. Vygotsky, yakınsak gelişim alanı kavramını ortaya atmıştır. Kişinin kendi başına yapabilecekleri ile bir uzman/öğretmen rehberliğinde yapabilecekleri arasında mutlaka fark oluşmaktadır. İşte bu farka yakınsak gelişim alanı denmektedir. Vygotsky'ye göre öğretmen, öğrencinin bilgiyi oluşturmaya rehberlik eden kişidir.

Kısaca bilginin bu şekilde oluştuğundan bahsedildikten sonra bilginin, özelde matematik bilgisinin ne olduğunu incelemenin yerinde olacağı düşünülmektedir. Pek çok araştırmacının, matematiksel bilginin iki boyutu olduğu konusunda hem fikir olduğu bilinmektedir. Ancak bunu farklı isimlerle ifade etmişlerdir; Gray ve Tall (1994) süreç-kavram (*process-concept*), Hiebert ve Lefevre (1986) kavramsal-işlemsel bilgi, Sfard (1991) işlemsel-yapısal kavrama (*operational-structural conception*), Skemp (1976) işlemsel-ilişkisel anlama (*instrumental-relational understanding*) gibi. Harel'a (2008a) göre *matematik iki kümenin birleşiminden oluşmaktadır; ilk küme aksiyomlar, tanımlar, teoremler, ispatlar, problemler ve çözümlerini içeren yapılar koleksiyonudur ve tarih boyunca matematikte ortaya konulan bütün anlama yollarını içermektedir. İkinci küme ise*

ilk kümeyi oluşturan ürünlere ait zihinsel eylemlerin karakteristikleri (özellikleri) olan düşünme yollarını içermektedir (s. 490). Bu bilginin ışığında matematiğin, “konu alanı” ve “kavramsal araçlar” olmak üzere iki boyuttan oluşan bir disiplin olduğunu söylemek mümkündür. Burada “konu alanı”, kişinin yürüttüğü zihinsel eylemi sonucunda ortaya koyduğu üründür ve zihinsel eylemin anlama yollarını oluşturmaktadır. “Kavramsal araçlar” ise yürütülen zihinsel eylemin ortak bilişsel özelliklerini ifade etmekte ve düşünme yollarımızı oluşturmaktadırlar.

1.1.1. DNR Tabanlı Öğretim

Öğrencilerin başarılarını artırmak için okullarda öğretilmesi gereken matematiğin içeriğinin ne olması gerektiğini ve bunun nasıl öğretilmesi gerektiğini ortaya koyan yaklaşım DNR tabanlı öğretimdir. DNR; duality, necessity, repeated reasoning kelimelerinin baş harflerinden oluşan bir kısaltmadır. Ursavaş (2014) çalışmasında bu kavramları etkileşim, gereklilik, sorgulama olarak kullanmıştır. Bu çalışmada ise bahsi geçen kavramlar etkileşim, gereklilik, muhakeme olarak kullanılacaktır. DNR felsefi boyutunu oluşturan öncüllerden, bu öncüllerden doğan kavramlardan ve deneysel çalışmalarla desteklenen öğretim ilkelerinden oluşmaktadır.

“Okullarda öğretilecek matematiğin içeriği ne olmalıdır?” sorusunun cevabı etkileşim ilkesinde gizlidir. Etkileşim, matematik bilgisinin anlama ve düşünme yollarından oluştuğunu; üretilen anlama yollarının düşünme yollarından etkilendiğini, düşünme yollarının da anlama yollarının üretilmesi ile geliştiğini iddia etmektedir (Harel, 2008b, s. 899). Matematik bilgimiz, yürütülen zihinsel eylemin özelliklerinden ve ortaya konulan ürünlerden oluştuğuna göre matematik eğitiminde de amaçlanması gereken şey bu iki bilgi türünün geliştirilmesi olmalıdır. Öğrencinin zihninde ne olup bittiğini anlaşılırsa ve zihinsel sürecinin gelişimine yardım edilirse, öğrencinin ortaya koyduğu ürünün de istendik seviyeye yaklaştığı görülebilir. Benzer şekilde öğrencinin ortaya koyduğu ürünün değişimi amaçlanırsa, bu ürüne ulaşmak için öğrencinin zihninde meydana gelen düşünme yollarının gelişimine de katkı sağlanabilir. Ancak günümüzde sınav kaygısı, yetiştirilmesi gereken içerik (Baki & Kartal, 2004) gibi sebeplerle, öğrencinin ortaya koyduğu ürünü ifade eden anlama yollarının gelişimine daha çok önem verildiği bilinmektedir. Oysa matematik bilgisinin dolayısıyla matematiksel düşünmenin gelişimi, iki bilgi türünü ifade eden anlama ve düşünme yollarının birlikte gelişimine bağlıdır.

Öğrencide istendik anlama ve düşünme yollarının nasıl geliştirileceği ise gereklilik ve muhakeme ilkelerinde gizlidir. Harel'a göre (2008b) öğrenmenin tek yolu problem çözmedir. Çünkü zihinde, ancak problemle karşılaşıldığı zaman dengesizlik meydana gelmektedir. Birey, yeni problem durumunu mevcut bilişsel şemasının içine almak istemektedir. Ancak yeni problem durumu mevcut şemaya uymadığında, şemasını düzenleyerek yeni bilişsel şemasını yani bilgisini oluşturmaktadır. *Öğrenme, zihinsel ve psikolojik ihtiyaçlar sonucu oluşan; anlama ve düşünme yollarının kullanıldığı ve yeniden oluşturulduğu, dengesizlik-dengeleme süreçlerinin devamlılığı ile oluşan bir süreçtir* (Harel, 2008b, s. 897). O halde matematik eğitimi boyutunda ele alınacak olursa, öğrenmenin gerçekleşebilmesi için öğrencinin zihinsel ve psikolojik ihtiyaçlarına cevap vermek gerekmektedir. Motivasyon, kişinin öğrenmeye dair ilgisi, isteği, gönüllülüğü olup psikolojik ihtiyacını oluşturmaktadır. Kişinin bir problemle karşılaştığında, onu çözmeye istek duyması ve problemi çözebilmek için azim göstermesi gerekmektedir. Zihinsel ihtiyaç ise bireyin karşılaştığı problem durumuyla mevcut bilgisini ilişkilendirerek mevcut bilgisinden yeni bilgisini elde etmesini sağlayan zihinsel karışıklık durumunun sağlanmasıdır (Harel, 2008b, s. 898). Her ne kadar zihinsel ve psikolojik ihtiyaçlar birbirini tamamlar nitelikte olsa da, DNR zihinsel ihtiyaçlara daha çok önem vermektedir.

Öğrencide problemi çözmek için zihinsel ihtiyacı oluşturup istendik anlama ve düşünme yollarını geliştirdikten sonra, bu bilgilerin öğrenci tarafından içselleştirip organize edilmesi için yapılması gereken ise muhakeme ilkesinde gizlidir. Cooper (1991) tekrar eden muhakemenin zengin ve birbirine bağlı bilişsel ağların oluşturulması için gerekli olduğunu iddia etmektedir. Bilişsel ağların oluşumu için de zihinde karışıklık meydana gelmesi gerekmektedir. Çocukların 'matematiği yapmaları' ve kendi bilgilerinin üzerine inşa etmeleri zor ve karmaşık bir süreçtir. Bu amaçla çocuğun matematiğine ait bilgisinin ve anlamasının derinleştirilmesinde, arkadaşlarıyla ve öğretmeniyle olan iletişimin derinleşmesinde matematiksel deneyimler önemli yer tutar (Kieren & Pirie, 1991). Öğrenciye sunulacak olan problemlerin, rutin problemlerin tekrar tekrar çözümü şeklinde olmaması gerekmektedir. Problemlerin öğrencinin oluşturduğu anlama ve düşünme yollarını içselleştirebileceği, bilgisini uygulayıp yeniden organize edebileceği, çözmek için zihinsel ve psikolojik ihtiyaç duyacağı türden yani oluşturulacak problem durumlarının ve çözümlerinin öğrenciyi düşünmeye sevk edeceği türden olması gerekmektedir.

1.1.2. Cebirsel Düşünme

Cebirin ne olduğu, onu sorduğumuz kişinin bakış açısına göre değişmektedir. Bir öğrenciye sorarsanız cebir, başarılması gereken bir derstir; zor ve anlaşılmaz semboller yığındır. Bir öğretmene sorarsanız cebir, genelleştirilmiş aritmetiktir; yetiştirilmesi gereken matematik konularından biridir. Bir matematikçiye sorarsanız cebir, matematiğin dilidir. Cebirin, aritmetiğin genellenmiş şekli olduğu, problem çözme aracı olduğu, yapıların ve ilişkilerin analiz edildiği dil olduğu; bütün bunları yaparken de genelleme, soyutlama, problem çözme, modelleme, formüle etme gibi araçları kullandığı söylenebilir. Ancak cebirin ifade ettiği anlam bundan çok daha fazlasıdır. O, bir düşünme yoludur. Nasıl ki herhangi bir zihinsel eylemimizin karakteristiği, o zihinsel eylemin düşünme yolunu ifade ediyor ise cebiri de matematiksel eylemlerimizin düşünme yolu olarak değerlendirebiliriz.

Cebirsel düşünme, cebir ile bağlantılı olmasına rağmen cebirin ifade ettiğinden daha geniş bir anlama sahiptir. Cebirsel düşünme, matematiksel düşünmenin özel bir formudur ve sadece cebir çalışmalarıyla sınırlı değildir (Akkan, 2016). Cebirsel düşünme, bir S dizisindeki elemanlar arasındaki benzerliği görme, bu benzerliğin S dizisinin tüm elemanlarında olduğunun fark etme, bu benzerliğin S dizisinin herhangi bir teriminin ne olacağı hakkında karar verirken kullanma yeteneğini içermektedir (Radford, 2006, s. 5).

Cebirsel düşünme, sayı ve hesaplama daire deneyimlerden genellemeler meydana getirmeyi, bu fikirleri anlamlı bir sembol sistemi kullanarak biçimlendirmeyi, örüntü ve fonksiyon kavramlarını keşfetmeyi içermektedir (Van De Walle, Karp & Bay Williams, 2003). Cebirsel düşünmenin gelişimi, matematiksel düşünmenin gelişimine benzer şekilde bir süreçte gerçekleşmektedir. Çocuklarda cebirsel düşünmenin gelişimi beş aşamadan oluşmaktadır; ön-formal örüntü (*pre-formal pattern*), informal örüntü, formal örüntü, genelleme, soyut genelleme (Twohill, 2013). Bu aşamalar kısaca şu şekilde açıklanabilir; örüntülerin fark edilemediği ön-formal örüntü, tekrar eden örüntülerin benzerliklerinin ifade edildiği informal örüntü, örüntünün yakın terimleri hakkında fikir yürütüldüğü formal örüntü, örüntünün kuralını açıklayıp matematiksel olarak ifade edildiği genelleme. Son seviye olan soyut genellemede ise öğrenci artık cebirsel düşünebilmekte, yaptığı genellemeyi sembolize edebilmekte ve bunu matematiğin diğer alanlarına uygulayabilmektedir. Cebirsel düşünmenin amacı genelleme yapma, ilişkileri gösterme ve değişimleri analiz etmektir. Bu sayede farklı konular arasında bağlantılar güçlendirilebilmekte, farklı düşünme şekilleri geliştirebilmektedir (Booker, 2009).

1.1.3. Genelleme

İlköğretim düzeyinde cebirsel düşünmenin iki önemli bileşeni, genelleme yapma ve bunları göstermek için sembolleri kullanarak problemleri çözmektir (Carpenter & Levi 2000). Öğrencilerin matematiksel yapıları genellemek için onları dış görünüşlerinin benzerliğine göre sınıflamaya eğilimleri olduğu bilinmektedir. Daha sonraki yıllarda yapılan genelleme eylemi fiziksel özelliklerinin görünümünün ötesinde benzerliklerin ve ilişkilerin fark edilmesiyle mantıksal-matematiksel çıkarımlar yaparak, bunların sembollerle ifade edilmesini içermektedir. Dolayısıyla matematiği öğrenmede ve genellemenin geliştirilmesi sürecinde, matematiksel gösterim önemli bir yetenektir (Carraher, Martinez & Schliemann, 2008). Öğrenciler örüntüleri gözlemleyerek genelleme yapmaya başladıklarında, cebirsel düşünme de başlamaktadır.

Alan yazın incelendiğinde öğrencilerin çeşitli cebirsel problemleri çözerken kullandıkları genelleme stratejileri tanımlanmıştır: örüntüyü parçalarına ayırma, bir önceki terimden sayarak bir sonraki terimi elde etme gibi. Ancak bunlar, araştırmacı perspektifinden yapılmış sınıflandırmalardır. Dolayısıyla bu stratejiler, öğrencinin zihninde neler olup bittiğiyle ilgili fikir vermemektedirler. Örneğin; öğrencinin bir sonraki terimi, sayma yoluyla elde ettiğini kabul edelim. Bu stratejinin belirlenmesi ile öğrencinin, zihnindeki hangi bilgisini kullandığına ve nasıl bir benzerlik oluşturduğuna dair yorum yapmak mümkün görünmemektedir. Oysa öğretim sürecinde, öğrenci merkezde olduğuna göre ve bilgi onun zihninde oluşturulduğuna göre genelleme yaparken de öğrencinin zihninde meydana gelen eylemlerle ilgili daha çok bilgi veren bir genelleme sınıflandırmasına ihtiyaç duyulmaktadır.

Ellis (2004) genellemeyi, süreç (genelleme eylemleri) ve ürün (yansıma genellemeleri) olarak ele alarak genelleme taksonomisini oluşturmuştur. Oluşturulan bu taksonomide Lobato'nun (2003) öğrenen odaklı transfer (*actor-oriented transfer*) yaklaşımı temeldedir. Öğrenen odaklı transfer, bireyin karşılaştığı yeni durumla önceden zihninde olan bilgilerinin arasında nasıl benzerlik kurduğuna dair önemli ipuçları vermektedir. Dolayısıyla bu yaklaşımda, öğrencinin karşılaştığı problemler arasında kurduğu kendi benzerliklerini oluşturma süreci, öğrenen perspektifinden ele alınmıştır (Lobato, 2003). Böylece alan yazında geçen transfer çalışmaları, araştırmacı perspektifinden öğrenci perspektifine yükseltilmiş ve transfer çalışmalarına yeni bir boyut eklenmiştir. Ancak oluşturulan benzerlik ilişkileri, zihinde kolay bir şekilde kodlanmazlar (Lobato & Siebert, 2002). Bu süreci analiz etmek zordur. Oysa tasarı deneylerinde yürütülen eylemler, öğrencinin zihninde neler olup bittiğine dair önemli ipuçları verebilir (Lobato, 2003).

Tasarı deneyi, bağlamsal öğrenmenin gerçekleşmesi için öğretim stratejisi ve içeriğinin tasarlandığı ve uygulandığı, yeni geliştirilmiş bir modeldir (Brown, 1992). Tasarı araştırmalarının birkaç çeşidinden biri öğretim deneyleridir (Molina, Castro & Castro, 2007). Öğretim deneyleri, öğrenme adına daha etkili bir sınıf ortamının oluşturulduğu, bir süreliğine araştırmacının gerçekleştirilen öğretim uygulamalarının sorumluluğunu aldığı, öğrencide meydana gelen değişimden çok öğrencide öğrenmenin nasıl gerçekleştiğinin araştırıldığı bir modeldir (Gravemeijer & Cobb, 2006).

Bu çalışmada öğrencilerin cebirsel problemleri çözerken genelleme süreçlerine dair düşünme ve anlama yolları, Ellis (2004) tarafından belirlenen genelleme taksonomisi kullanılarak analiz edilmiştir. Böylece öğrencinin zihninde genelleme süreçlerine dair yaptıkları ilişkilendirmeler, mevcut bilgileriyle kurdukları benzerlikler hakkında daha çok yorum yapma imkânı olmuştur. Ek olarak öğretim deneyleri, öğrencinin zihninde olup bitenler hakkında daha çok fikir sahibi olunmasını sağlamaktadır. Araştırmacı tarafından bir öğretim planlanmakta ve bu süreç analiz edilmektedir. Bu çalışmada uygulanan öğretim deneyleri ile de öğrencilerin genelleme süreçleri incelenmiş, genellemelerine ilişkin düşünme ve anlama yolları belirlenmiştir.

1.2. Araştırmanın Amacı

Bu çalışmanın amacı, uygulanan DNR tabanlı öğretim deneyi sürecinde sekizinci sınıf öğrencilerinin genellemelerine ilişkin anlama ve düşünme yollarını belirlemektir. Bunun yanında öğrencilerin uygulanan DNR tabanlı öğretim hakkında ne düşündüklerini belirlemek de amaçlanmıştır.

Bu amaç doğrultusunda aşağıda belirlenen alt problemlere cevap aranmıştır;

1. Sekizinci sınıf öğrencilerinin genelleme süreçlerine ilişkin düşünme yolları nelerdir?
2. Sekizinci sınıf öğrencilerinin genelleme süreçlerine ilişkin anlama yolları nelerdir?
3. Sekizinci sınıf öğrencilerinin uygulanan DNR tabanlı öğretime ilişkin görüşleri nelerdir?

1.3. Araştırmanın Önemi

Cebirin önemi ileri matematik, bilim, ekonomi, ticaret, bilgisayar programcılığı ve günlük hayat gibi ilişkilerin olduğu her yerde kendini hissettirmektedir. Cebirin, matematik ve

matematik dışındaki okul derslerinin başarılmasından profesyonel anlamda meslek sahibi olmaya kadar ‘*akademik bir pasaport*’ (Schoenfeld, 1995, s.3) olma özelliği bulunmaktadır. Dolayısıyla her bireye, cebirsel düşünmesini geliştirebileceği imkân sunulmalıdır (Booker, 2009). Bu da ancak okul yıllarında alacağı derslerle mümkün olmaktadır. Geleneksel cebir öğretiminin cebirsel ifadeleri sadeleştirme, denklemleri çözme, kuralları öğrenme ve uygulama üzerine olduğu bilinmektedir. Bu şekilde, kuralların öğrencinin matematiksel bilgisi ile ilişki kurulmadan işlemsel olarak öğretilip uygulandığı cebir, öğrencinin zihninde işlemler ve semboller yığını olarak yer etmektedir (Kaput, 2000). Bunun yerine işlemsel ve kavramsal bilginin gelişiminin amaçlandığı, öğrencinin zihinsel ihtiyaçlarını karşılayacak bir cebir öğretiminin daha etkili olacağı düşünülmektedir.

DNR tabanlı öğretim, matematik eğitimcilerinin üzerinde çalıştığı hangi matematik konularının nasıl öğretilmesi gerektiği sorularına, çeşitli öğrenme teorilerini temele alarak cevap veren bir yaklaşımdır. Matematik; aksiyomlardan, tanımlardan, teoremlerden, ispatlardan, problemlerden ve çözümlerinden oluşan anlama yolları ile bu yapıları oluşturan zihinsel eylemlere özgü düşünme yollarından oluşmaktadır (Harel, 2008a). Matematik öğretimi de öğrencinin anlama ve düşünme yollarının her ikisinin birlikte gelişimini amaçlamalıdır. DNR tabanlı öğretim öğrenmeyi, zihinsel ve psikolojik ihtiyaçlar sonucunda zihinde meydana gelen dengesizlik-dengeleme süreçlerini içeren ve bu süreçler sonucunda anlama ve düşünme yollarının oluşturulduğu bir süreç olarak ele almaktadır (Harel, 2008b). Dolayısıyla öğrencinin zihninde dengesizlik meydana getirmek, en az öğretilen içerik kadar önemlidir. Çünkü *entelektüel olarak amaçsız* bir cebir programı, cebir öğretmez (Harel, 2008a, s. 488).

Etkili bir öğretimin gerçekleştirilmesi için öğrenenin merkeze alınması gereği açıktır. Dolayısıyla bilginin oluşturulma sürecinde, öğrenenin zihninde meydana gelen eylemler de önem kazanmaktadır. Öğrencinin zihinsel eylemlerinin farkında olduğu ve bu eylemler dikkate alınarak gerçekleştirilen bir öğretim, öğrencinin bilgisini oluşturmada daha etkili olacaktır. Öğrencilerin genelleme süreçleri ile ilgili anlama ve düşünme yollarının belirlenmesi, bu anlamda önem kazanmaktadır. Zira öğretmenler öğrencilerinin yaptıkları genellemenin farkında değillerse ve onların genelleme yapmaları yönünde çalışmalar yapmıyorlarsa, o zaman matematiksel düşünmeden bahsedilemez (Mason, 1996). Matematik öğretmenlerinin, öğrencilerinin zihinsel eylemlerin farkında olmaları ve sınıf ortamını bu şekilde ayarlamalarının, öğrenciye daha çok hitap edeceği düşünülmektedir. Öğrencinin yeni anlama ve düşünme yolları oluşturmada, öğrencinin daha iyi anlamasını sağlayarak problemlere

farklı çözüm yolları bulmasını sağlayabilir. Ayrıca bu çalışmada öğrencilerin genelleme süreçleri, öğrenci perspektifinden ele alınarak bu sürece ilişkin bir model de önerilmektedir. Öğrencilerin genelleme süreçlerine ait bir model ortaya konması sebebiyle de bu çalışmanın önemli olduğu düşünülmektedir.

Alan yazın incelendiğinde öğrencilerin genelleme stratejilerini belirleyen çalışmalara rastlanabilir. Bu çalışmada öğrencilerin genelleme süreçleri, öğrenci perspektifinden ele alınarak incelenmiştir. Bu sebeple öğrencilerin genelleme süreçleri, öğrenen odaklı transferi temele alan genelleme taksonomisi kullanılarak analiz edilmiştir. Ellis (2004) genelleme taksonomisini ortaya koyduğu çalışmasında, bu taksonominin farklı konularda ve farklı örneklemelerde kullanılmasını önermiştir. Böylece örneklem, konu, desen değiştiğinde, genelleme taksonomisinin çalışıp çalışmadığını görme imkânı doğacaktır. Dolayısıyla bu çalışmada örneklem, uygulanan öğretim deneyi, çalışılan cebir konusu değiştirilmiştir. Böyle olunca da öğrencilerin sorulara verdikleri çözümler incelendiğinde, genelleme taksonomisine 2 farklı kategorinin daha eklenmesi uygun görülmüştür. Yeni eklenen bu kategoriler, çalışmanın bulgular kısmında detaylı olarak açıklanmıştır.

Bu çalışmada uygulanan DNR tabanlı öğretim ile öğrencilerin genelleme süreçlerine ilişkin anlama ve düşünme yollarının, öğrencilerin zihinsel ihtiyaçlarının göz önüne alınarak gelişimi planlanmıştır. Türkiye’de matematik eğitimi literatürü incelendiğinde hem DNR tabanlı bir öğretim modelinin geliştirilerek uygulandığı bir çalışmaya hem de öğrencilerin genelleme süreçlerine ilişkin bir modelin öne sürüldüğü bir çalışmaya rastlanmamıştır. Bu çalışmanın yeni bir yaklaşımı ele alarak matematik eğitimi alan yazınına kattığı için önemli olduğu düşünülmektedir.

1.4. Varsayımlar

1. Öğrencilerin kavramsal ve işlemsel cebir testlerine bilgilerini yansıtacak şekilde cevap verdikleri kabul edilmiştir.
2. Öğretim deneyinde öğrencilere verilen görevlerin uygunluğu konusunda fikirlerine başvuru uzmanların dönütlerinin yeterli olduğu kabul edilmiştir.

1.5. Sınırlılıklar

1. Başlangıçta bu çalışmanın 12 öğrenci ile yürütülmesi planlanmıştı. Ancak 3 öğrenci çalışmaya devam etmek istemediğinden, elde edilen bulgular çalışmaya katılan 9 öğrenci ile sınırlıdır.
2. Öğrencilerin belirlenen düşünme ve anlama yolları, öğretim deneyinde uygulanan görevlerle sınırlıdır.
3. Öğretim deneyinde uygulanan görevler örüntü ve ilişkiler, değişimin analizi, denklemler konuları ile sınırlıdır.
4. Öğrencilerin düşünme ve anlama yollarının belirlenmesinde Ellis (2004) tarafından belirlenen genelleme taksonomisi esas alınmıştır.

1.6. Tanımlar

Genelleme: Genelleme, verilen bir argümanı daha geniş durumlara uygulamaktır (Harel & Tall, 1991, s. 38)

Öğrenen odaklı transfer: Öğrenen odaklı transfer, bireyin karşılaştığı yeni durumu, daha önceden zihninde olan hangi yapılarıyla nasıl ilişkilendirdiğine dair önemli ipuçları veren bir transfer yaklaşımıdır (Lobato, 2003).

Öğretim deneyi: Öğretim deneyi, öğrencinin matematik bilgisini nasıl oluşturduğunu ve süreç içinde bilgisinde meydana gelen gelişimin araştırıldığı araştırma desenidir (Steffe & Thompson, 2000, s. 273).

DNR tabanlı öğretim: DNR kavram ve iddialarının temelindeki felsefeyi ortaya koyan öncüllerden, bu öncüllerden doğan ve tanımlanan kavramlardan, DNR öncüllerinden çıkan ve kavramları bağlamında oluşan iddialardan meydana gelen ve deneysel çalışmalarla da desteklenen teorik bir çerçevedir (Harel, 2008b, s. 893).

Anlama ve düşünme yolları: Anlama yolları tanımlar, teoremler, ispatlar, problemler ve çözümler gibi zihinsel eylemlerimiz sonucunda oluşan ürünleri ifade ederken; düşünme yolları bu ürünleri oluşturmak için gerçekleştirilen sürecin özelliklerini ifade eder.

BÖLÜM 2

KURAMSAL ÇERÇEVE

Asıl konu, öğretmek için en iyi yolun ne olduğu değildir. Asıl konu matematiğin ne olduğu hakkındadır...
(matematiğin) felsefi temeli tartışılmalıdır... Matematiğin doğasına ait problemlerle yüzleşilmeden,
(matematik) öğretimi hakkındaki tartışmalar çözülemez (Hersh, 1979, s.34).

2.1. Cebir

Alan yazın incelendiğinde cebire ilişkin pek çok tanımla karşılaşılabilir (Kaput, 2000; Kieran, 1992; Sfard, 1995). Ancak cebirin işlevlerini de içermesi açısından Usiskin'in (1988) sınıflandırmasına yer vermek uygun olacaktır.

i) Genelleştirilmiş aritmetik olarak cebir

Aritmetikten bildiğimiz işlemlerin ve sayıların özellikleri hakkında genelleme yapmak ya da eşitlik ifadesini nicelikler arasındaki ilişki olarak görmek, cebirin genelleştirilmiş aritmetik boyutunu oluşturmaktadır (Blanton & Kaput, 2005).

Öğrenciler okulun ilk yıllarında sayıların dağılma, birleşme vb. özellikleri ile ilgili işlemler yapmaktadırlar. Örneğin; $2 \times (3+6) = (2 \times 3) + (2 \times 6)$ işlemi, öğrenciler için basit bir işlemdir. İlkokulun bitip ortaokulun başlamasıyla, işin içine harfler girmekte ve bu işlem $a \times (b+c) = (a \times b) + (a \times c)$ halini almaktadır. Böylece, cebirin temelleri atılmış olunur. Matematiksel yaratıcılık ve matematiğin zarafeti de buradadır (Skemp, 1989).

Öğrencilerin aritmetik işlemlerdeki, örüntülerdeki, sayı dizilerindeki genel ilişkilerin farkına varmasıyla, cebirsel düşünme başlamaktadır. Dolayısıyla öğrenciler, genelleştirilmiş aritmetikte sayılar ve bilinmeyen yerine harfler ya da cebirsel ifadeler yazdıklarında, cebir onlar için başlamış demektir (Stacey & Macgregor, 1997).

ii) Problemlerin çözümünü içeren işlemler olarak cebir

Öğrenciler okulun ilk yıllarında “Benim yaşı, kardeşimin yaşının 3 katından 5 fazladır. Benim yaşı 14 ise, kardeşimin yaşı kaçtır?” gibi bir soruyla karşılaştıklarında, ters işlem yaparak 14’ten 5 çıkarır, sonucu 3’e böler ve istenen yaşı bulmaktadırlar. Ancak ortaokul yıllarına gelindiğinde, bu ifade bilinmeyenler arasındaki ilişkinin cebirsel olarak ifade edildiği “ $3x+5=14$ ” halini almaktadır (Usiskin, 1988). Böylece aritmetikten, daha soyut olan cebir çalışmalarına geçilir. Öğrenciler için matematiği anlaşılabilir ve soyut yapan cebir çalışmalarının başlamış olmasıdır.

Aritmetiğin genelleştirilmiş şekli olan cebirde öğrencilerden ifadeyi uygun hale dönüştürüp genelleme yapmaları beklenirken, problem çözme boyutunda ifadeyi sadeleştirip soruyu çözmeleri beklenmektedir (Usiskin, 1988). Cebir, öğrencilere matematiksel kavramlar ve kavramlar arası ilişkiler ile teoremler ve işlemler arasında bağlantı kurularak öğretilmelidir (Mason, Stephens & Watson, 2009). Bu şekilde ilişkilendirilerek öğrenilen matematik, bireyin ilişki kurduğu mevcut bilgisinden çözüm yoluna ulaşmaya kadar olan yolda farklı şekillerde düşünerek kavramsal yapılar oluşturma imkânı da sunmaktadır (Skemp, 1976). Aksi halde öğrenciler hatırladıkları kadarıyla kuralları uygulayarak işlem yapmaya ve daha kötüsü matematikten uzaklaşmaya zorlanmaktadırlar (Kaput, 2000).

iii) Nicelikler arasındaki ilişkilerin incelendiği alan olarak cebir

Cebir, günümüzde genelleştirilmiş aritmetikten çok bilinen ya da bilinmeyen nicelikler arasındaki benzerliklerin ve ilişkilerin bulunması şeklinde öğretilmektedir (Schmittau, 2011). Doğru denkleminin genel formunun $y=mx+n$ şeklinde gösterilmesinden hareketle, bu gösterimde değişkenler arasında bir ilişki olduğu bilinmektedir. Genel gösterimi bu şekilde olan bir denklemde m , doğrunun eğimini; n , doğrunun y eksenini kestiği noktayı göstermektedir. Dolayısıyla burada x bağımsız değişkeni, y ise bağımlı değişkeni göstermektedir. Ancak öğrenciler bu denkleme baktıklarında y , m , x , n ’nin hepsinin değişken olduğunu düşünmektedirler (Usiskin, 1988). Nitekim bu çalışmada yürütülen öğretim deneyinin 10. gününde doğru denklemi ile ilgili çalışırken, öğrenciler m ve n ’nin değişken olduklarını ve bu değerlere keyfi olarak istenen değerin verilebileceğini ifade etmişlerdir.

Ortaokul matematiğinde cebir çalışmaları matematiksel ilişkilerin bulunması, tanımlanması ve bu ilişkiler hakkında akıl yürütmeyi içermelidir. Böylece sonraki yıllarda gelişecek olan fonksiyonel düşünmenin temelleri atılmış olunur (Blanton & Kaput, 2005).

iv)Yapıların incelendiği alan olarak cebir

Cebir gerçek sayılar, karmaşık sayılar ve polinomlarla çalışmayı; grup, halka, vektör uzayları gibi yapıları incelemeyi içermektedir. Örneğin; çarpanlara ayırma konusunda, öğrencilere sık sorulan soru tarzlarından biri $3x^2+4ax-132a^2$ ifadesinin çarpanlara ayrılmasıdır. Bu ifadede fonksiyonel bir ilişki bulunmamaktadır. Ayrıca çözüm kümesi bulunacak bir denklem olmadığı için değeri bulunacak bir bilinmeyen de içermemektedir. Burada öğrenciden işlem bilgisini kullanarak bu ifadeyi çarpanlara ayırması beklenmektedir. Burada öğrenci için bir ikilem söz konusudur. Bir yandan öğrenciden değişkenlerin değerini bulmalarını ya da değişkene değer verip çözüme ulaşmaları istenirken öte yandan değişkenleri sadece değişken (ya da sadece obje) olarak düşünüp, onlarla işlem yapmaları beklenmektedir (Usiskin, 1988). Bu da öğrencilerin anlamakta zorlandıkları başka bir nokta olarak karşımıza çıkmaktadır. Örneğin; bu çalışma kapsamında yürütülen öğretim deneyinin 13. gününde Gül ile o günün ödevi hakkında çalışırken yol-zaman grafiği verilen arabanın zamana bağlı yol denklemini $y=4x$ olarak bulmuştur. Bu denkleme göre arabanın x saatte alacağı yol sorulduğunda, Gül'ün cevabı bulmakta zorlandığı görülmüştür. Çünkü $y=4x$ denkleminde x bağımsız değişken iken aynı zamanda arabanın x saatte alacağı yol sorulduğunda, Gül x' in bağımsız değişken olarak neyi sembolize ettiğini kavramakta sıkıntı yaşamıştır.

Mason'a (1996) göre cebir, bir şey ifade edemeyecek kadar geniş bir anlama sahiptir. Cebir köklerini al-jabr problemlerinden (al-jabr, negatif ya da kesirli sayıları yok etmek için denklemin her iki yanına aynı sayıyı eklemek ya da çarpmak demektir) ve al-mugabala problemlerinden (al-mugabala, her iki taraftan aynı sayıyı çıkarmak ya da bölmek demektir) almaktadır. Esas amacı, eşitlemek ve karşılaştırma yapmaktır. Tabi ki günümüzde cebirin geldiği nokta çok daha fazlasıdır (Mason, 1996).

Cebir, genellemeleri ve ortaokul matematiğinde olan ve olabilecek bütün genellemelerin artan şekildeki formel bir dille ifadesini içermektedir (Kaput, 2000). Cebirsel düşünmenin gerçekleştiği bir cebir dersinde genelleme, formüle etme, modelleme, soyutlama, fonksiyonel ilişkileri tanıma gibi zihinsel eylemler sıkça kullanılmalıdır (Kaput, 2000).

Cebir denklemleri çözmek için, fonksiyonel ilişkileri analiz etmek için, ifade ve ilişkileri içeren gösterim sistemlerinin yapısını belirlemek için cebirsel ifadeleri ve sembolleri kullanmaktadır. Bununla birlikte cebirin asıl amacı denklemleri çözmek, fonksiyonel ilişkileri ve cebirsel ifadeleri içeren yapıyı analiz etmek değildir. Bunlar reel dünyayı modellemek için ve çeşitli durumlarla ilişkili problemleri çözmek için birer araçtır. Dahası

cebir, bilgi ve teknik kümesinden fazlasıdır; cebir bir düşünme yoludur (Lew, 2004, s. 92-93).

2.2. Cebirin Tarihi

Tarihi gelişimleri incelendiğinde, cebirsel kavramların çok zengin oldukları görülmektedir. Cebir tarihinin bilinmesi, kavramların ne aşamalardan geçmiş olduğunu ve cebirsel bilginin oluşumunu analiz edebilme imkânı vermektedir (Bednarz vd., 1996).

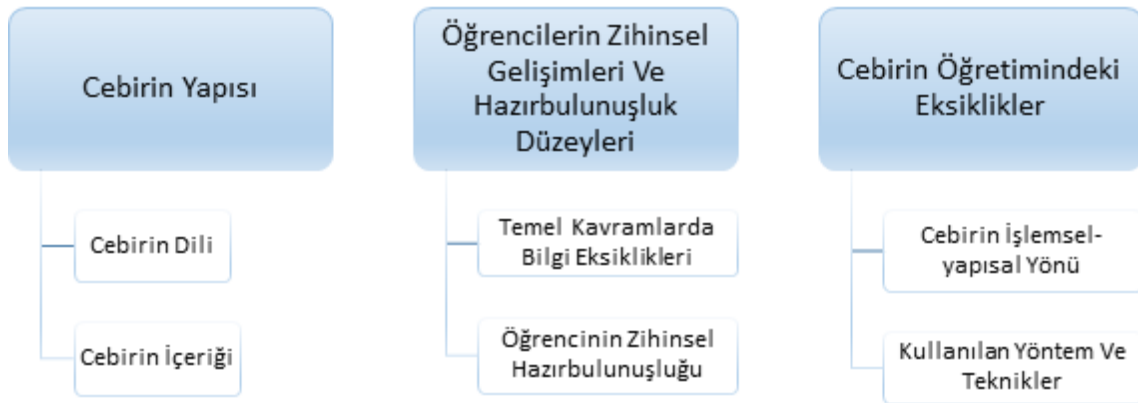
Cebirin yüzyıllar içindeki gelişimi üç aşamada incelenmektedir. İlk aşama problemlerin ve denklemlerin sözel olarak ifade edildiği, sembollerin ve işaretlerin kullanılmadığı retorik aşamadır. Bu aşama 16. yy öncesine denk gelmektedir. Daha sonra bilinmeyen nicelikler için harflerin ve kısaltmaların kullanıldığı senkoplu dönem başlamıştır. 16. yy'ın sonuna doğru asıl amaç, geneli ifade etmektense bilinmeyen ifadenin değerini bulmaktır. 17. yy ortalarına doğru Viete ve Descartes'ın çalışmalarıyla başlayan ve günümüzde kullandığımız, sembollerin hem bilinen hem bilinmeyenler için kullanıldığı, genel çözümlerin bulunduğu, kuralların ispat edildiği sembolik cebir dönemine geçilmiştir (Sfard 1991, 1995; Booker, 2009). Cebir tarihini bu şekilde özetledikten sonra cebirsel sembolizmin prosedürel yaklaşımdan yapısal yaklaşıma doğru gelişim gösterdiği söylenebilir (Kieran, 1992).

Sembolik cebirin gelişmesi ile matematikçilerin senkoplu dönemden sembolik döneme geçerken yaşadıklarına benzer sıkıntıları, aritmetikten cebire geçen öğrenciler de yaşayabilmektedirler (Chiappini, 2011). Cebirde öğrencilerin yaşadıkları zorlukların bir sebebi cebirin öğretiminde, tarihsel gelişiminin göz ardı edilmesidir. Oysa cebirin tarihsel gelişimi bize öğrencilerin düşünme şekilleri hakkında bilgi vermektedir (Radford, 1996). Sembolik cebirle ilgili bugün sahip olduğumuz bilgilerin yüzyıllar içindeki gelişiminin göz önünde bulundurulması gerekmektedir. Zira sembolik cebir, bu noktaya gelene kadar retorik ve senkoplu dönemlerden geçmiştir. Bugün okullarda öğretilen cebir konuları incelendiğinde, öğrencilerin daha çok sembolik cebirle ilgili konuları öğrendikleri görülebilir. Bu da öğrencilerin cebiri, harfler ve sayılarla yapılan soyut işlemler yığını olarak görmelerine sebep olmaktadır. Oysa çocuklarda cebirsel düşünmenin gelişimi, cebirin tarih içindeki gelişimi ile paralellik göstermektedir (Kieran, 1992). Kieran (1992) cebirin işlemsel ve yapısal boyutuna dikkat çekmektedir. Cebirin işlemsel boyutu, matematiksel dil ve sembollerin kullanılarak aritmetik işlemlerin yapılması bilgisini;

yapısal boyutu ise problemleri çözmek için kullanılan bağıntıların, kuralların neden öyle uygulandığı bilgisini içermektedir. Cebir öğretiminde işlemsel ve yapısal boyutun birbirini destekleyecek şekilde öğretilmesi gerekmektedir.

2.3. Cebirde Öğrencilerin Yaşadıkları Zorluklar

Alan yazın incelendiğinde, cebirde öğrencilerin yaşadıkları zorlukları; sorunun kaynağı olan cebir, onu anlamakta zorluk çeken öğrenci ve cebirin öğrenciye sunulmuş şekli olan cebirin öğretiminden kaynaklı eksiklikler olarak ele almanın daha kapsamlı olacağı düşünülmektedir. Zira Dede ve Argün (2003) öğrencilerin cebirde yaşadıkları zorlukları; cebirin yapısı, öğrencilerin zihinsel gelişimleri ve hazırbulunuşluk düzeyleri, cebirin öğretimindeki eksiklikler başlıkları altında incelemişlerdir. Öğrencilerin cebirde yaşadıkları zorluklar, Dede ve Argün (2003) tarafından yapılmış olan sınıflandırma temele alınarak bu çalışmanın amaçlarına göre yeniden düzenlenmiştir.



Şekil 1. Cebirde yaşanan öğrenci zorluklarının nedenleri

Cebirin öğrenciler tarafından anlaşılmasında cebirin yapısına, öğrencilerin zihinsel gelişimleri ve hazırbulunuşluk düzeylerine, cebirin öğretimindeki eksikliklere bağlı engellerle karşılaşmaktadır. Cebirin yapısına bağlı öğrenci zorlukları, cebirin dili ve içeriğinin anlaşılmasından kaynaklanmaktadır. Cebirin temel kavramlarındaki bilgi eksikliklerine bağlı ve öğrencinin zihinsel hazırbulunuşluğuna bağlı sebeplerden de öğrenciler cebir dersinde zorlanabilmektedirler. Ayrıca cebirin öğretimindeki eksiklikler arasında cebirin işlemsel ve yapısal boyutuna yeterince önem vermeden yapılan öğretim ve kullanılan yöntem ve tekniklerdeki eksiklik gösterilebilir.

2.3.1.Cebirin Yapısı İle İlgili Öğrenci Zorlukları

Cebir deyince, insanların aklına bir dizi semboller yığını gelmektedir. Bu semboller, aslında tam olarak cebir demek değildir. Zaman içerisinde cebirin ifade ettiği anlam da genişleyerek daha soyut ve sembolik bir hal almıştır (Mason, 1996). Bu da öğrencilerin, cebirin kuralcı ve soyut yapısında zorlanmalarına neden olmaktadır (Booker, 2009). Yapılan çalışmalara göre öğrencilerin cebirde yaşadıkları zorluklardan biri işaretlerin anlamı ve cebirsel dilin sentaksı (söz dizimi kuralları) ile ilgilidir. ‘x’ ve ‘n’ gibi basit işaretlerin ve ‘2+5’ ya da ‘x+17’ gibi bileşik işaretlerin temsil ettikleri objelerin yerine nasıl geçtiğinin anlaşılması ve bu işaretler üzerinden gerçekleştirilen işlemlerin anlaşılması konusunda sorunlar yaşanmaktadır (Radford & Puig, 2007, s. 146). Benzer şekilde Arzarello vd. (1994) çalışmalarında öğrencilerin cebirin semantik yönünde yani cebirsel sembollerin anlamını kavramakta zorluklar yaşadıklarını ifade etmektedirler. Cebirsel gösterimlerin kullanımındaki keskin adım, 1600’lü yıllarda Vieta’nın çalışmalarında belirli olmayan büyüklükler ve cebirsel ifadelerdeki değişkenler için harfleri kullanmasıyla başlamıştır. Harflerin önce keyfi sayılar için, daha sonra fonksiyonlar için kullanıldığı görülmektedir. Günümüzde ise farklı alfabelerden alınan harfler çeşitli matematiksel objeler için- kümeler, ilişkiler, uzaylar vb- kullanılmaktadır (Freudenthal, 2002). Clement (1982) öğrencilerin cebirsel denklemlerin kuralını bulmada yaşadıkları sıkıntıların başlıca sebeplerinin sözdizimsel ve semantik ile ilgili sorunlar olarak belirlemiştir.

Cebirsel bir ifadenin sembolik boyutu semantik, sembollerin diziliş sırası da sentaktik (sözdizimsel) olarak ele alınabildiğine göre, cebirin bir dil olduğu kabul edilmektedir. Günlük hayatta insanlarla ilişki kurabilmek için, anlaşabilmek için *dil* kullanılmaktadır. Matematikte insanların iletişim aracı ise cebirdir (Freudenthal, 2002). Vygotsky ’ye (1986) göre düşüncenin ve dilin kökenleri farklı olsa da birbirinden bağımsız olarak görülmemelidir. Dolayısıyla cebirsel düşünme ve dil, aynı sürecin birbirini bütünleyen iki boyutudur. Kelimelerin anlamı, dil bilimin ve zihinsel fenomenlerin kelimelere yüklediği anlama göre zaman içinde gelişim göstermiştir (Arzarello, Bazzini & Chiappini, 1995; Vygotsky, 1986). O halde cebirin matematiğin dili olmasından yola çıkarak, cebirin tarih içindeki gelişiminden bahsedildiği görülmektedir. Cebir günümüze gelene kadar retorik, senkoplu, sembolik cebir dönemlerinden geçmiştir. Her dönemde cebirin yapısının farklı olduğu bilinmektedir. Piaget’ ye göre kavramların anlamlandırılması, bireyin muhakemesi sonucunda belirli aşamalarda gerçekleşen gelişimsel bir süreçtir (DeVries, 2000). Bir de zihinsel fenomenlerin, kelimelere yüklediği anlamın zaman içindeki değişiminden

bahsedilmektedir. Bu da bireyin zihinsel hazırbulunuşluğunun, cebiri ve cebirin içerisindeki yapıların anlamlandırılmasında önemli olması şeklinde yorumlanmaktadır. Örneğin; bilinmeyen bir sayıyı bulmak için ilkokulda kutucuk kullanılırken, ortaokula gelindiğinde bilinmeyen yerine harfler kullanılmaktadır. x , y gibi harflerin bilinmeyen değeri göstermesinin anlaşılması, zihinsel bir olgunluk gerektirmektedir. Dolayısıyla ilkokuldaki öğrencinin, harfleri anlamlandırmaları beklenmemelidir.

Cebirle ilgili yapılan ilk çalışmadan soyut cebirin geldiği şu nokta binlerce yılı almıştır. Dolayısıyla öğrencilerin cebirde karşılaştıkları zorluklar bize çok şaşırtıcı gelmemelidir. Öğrenciler okuldaki cebir derslerinde, cebirin tarihi boyunca karşılaşılan problemler ve çözümleri hakkında çalışmaktadırlar. Matematikçilerin, herhangi bir probleme durmadan çalışmalarını sağlayan zihinsel olgunlukları, öğrencilerden beklenmemelidir. Dolayısıyla günümüzde öğrencilerin sembolleri anlamadan ve amacına uygun olmaksızın rastgele kullandıkları söylenebilir (Arcavi, 1995).

2.3.2. Öğrencilerin Zihinsel Gelişimleri ve Hazırbulunuşluk Düzeyleri ile İlgili Öğrenci Zorlukları

Öğrencilerin cebirle tanışmaları, matematiği artık eğlenceli bir ders olarak görmemelerine ve kendilerini matematikte yetersiz hissetmelerine neden olmaktadır. Bunun bir nedeni öğrencilerin sayılar ve sayılarla yapılan işlemlerde yeteri kadar iyi olmamalarıdır (Booker, 2009).

Alan yazın incelendiğinde öğrencilerin değişken, eşitlik ve denklem gibi temel aritmetik kavramlarda eksikliklerinin olduğu görülmektedir (Akkaya, 2006; Akkaya & Durmuş, 2006; Alexandrou-Leonidou & Philippou, 2011; Alibali vd., 2007; Clement, 1982; Dede, Yalın & Argün, 2002; Eisenberg, 1991; Falkner, Levi & Carpenter, 1999; Herscovics & Kieran, 1980; Küchemann, 1981; McNeil & Alibali, 2005; Rosnick, 1981; Stacey & MacGregor, 1997). Çeşitli araştırmacılar değişken kavramı, eşitlik kavramını ve denklem kavramını anlamayı ve bu kavramların önemini cebirsel düşünmenin merkezine koymaktadırlar (Eisenberg, 1991; Knuth vd., 2006; McNeil & Alibali, 2005; Schoenfeld & Arcavi, 1988). Değişken, eşitlik ve denklem kavramları cebirin temel kavramları olarak kabul edilmektedir. Dolayısıyla bu kavramların tam öğrenilmesi, öğrencinin sonraki cebir kavramlarını oluşturmalarında ve ilişkilendirmelerinde temel görevi görmektedir. Ancak

bazı araştırmacılar, öğrencilerin bu kavramlarla ilgili yaşadıkları sıkıntılardan yola çıkarak bu kavramları cebirsel engel olarak nitelendirmiştir (Schoenfeld & Conner, 2002).

Aritmetik problemlerinde harfler bilinen değerleri simgelemektedir. Bilinmeyenle karşılaşılması, problem çözme sürecinin bittiğini göstermektedir. Ancak cebir problemlerinde bilinmeyen olarak harf bir şekilde bulunduğundan, bu cebirsel sürecin başlangıç noktası olarak karşımıza çıkmaktadır (Radford & Puig, 2007). Değişken kavramının anlaşılması, aritmetikten cebire geçişte ve daha ileri seviyede matematiğin öğrenilmesinde temel teşkil etmektedir (Schoenfeld & Arcavi, 1988). Matematikte yapılan soyutlamaların temeli olmasına rağmen, öğrenciler değişkenlerin önemini tam olarak kavrayamamaktadırlar (Eisenberg, 1991). Oysa temel kavramları, sembolleri, ifadeleri doğru anlamlandırmaları ve kullanmaları cebirde başarılı olmaları için oldukça önemlidir (Kieran, 1992). Öğrenci eğer cebirsel dil yani sembolik dil kullanıyorsa, bu dilin temel bileşeni olan harflerin anlamını da bilmelidir (Pytlak, 2011). Ancak öğrencilerin değişken, parametre, bilinmeyen yerine kullanılan harfleri anlamada zorluk yaşadıkları bilinmektedir. Bununla birlikte herhangi bir değeri veya nesneyi temsil eden sembol anlamına gelen değişken kavramının bilinmeyen, parametre, sabit gibi terimlerle ilişkisi çok da açık değildir. Bu durum öğrencilerin anlamlandırması açısından engel oluşturmaktadır. Verilen bir denklemi çözmeden, o denklemdeki bilinmeyenin değerinin ne olduğundan emin olamayız. Örneğin x , herhangi bir sayı kümesinin elemanı olmak üzere $x+2=10$ denkleminde x bir değişkendir. Denklemi çözüp x ' in değerini 8 bulunca, x ' in tek sayı değeri aldığını gördüğümüzde onun bilinmeyen olduğunu düşünebiliriz. Ya da $|x+2|=10$ denkleminde x ' in reel sayı değerleri 8 ve -12'dir. Dolayısıyla x , bir değişkendir (Boz, 2013).

Cebirsel denklemler, eşitlik işaretinin ve yürütülen işlemin birlikte kullanıldığı yapısal gösterimlerdir (Kieran, 1992). Öğrencilerin denklemleri çözerken yaşadıkları zorluklar aritmetik bilgilerinin eksikliklerinden, aritmetikten cebire geçişte ve cebirin kendine has kavramları ile ilgili edindikleri yanlış ya da eksik anlamalardan kaynaklanabilir (Oktaç, 2010). Öğrencilerin aritmetik bilgilerinin eksikliğinden kaynaklı zorluklar da vardır. $2x + 4 = 18$ şeklindeki bir denklemi doğru anlayabilmek için öğrencilerin eşit işaretini, eşitliğin iki yanındaki ifadeler arasındaki eşitlik ilişkisi olması şeklinde düşünmelidirler. Eğer bu düşünce gelişirse, eşitliğin her iki tarafındaki sayısal ifadelerin birbirine eş olması ilişkisi kavranabilmektedir. Ayrıca bu eşitlik ilişkisinin kavranamaması durumunda, öğrencilerin aritmetikten cebire geçişte sorunlar yaşamaları olasıdır. Dolayısıyla

öğrencilerin eşitlik işaretini ‘işlem yap’ komutundan ya da işlemlerin soldan sağa bir sırada yapılıp ‘bize...değerini verir’ komutundan ziyade eşitlik ilişkisi şeklinde anlayıp yorumlamaları gerekmektedir (Falkner, Levi & Carpenter, 1999; Kieran, 1992; McNeil & Alibali, 2005). Öğrenciler, herhangi bir problemin çözümü olarak sayısal bir değer görmeyi beklemektedirler. Onlara göre cebirsel bir ifade, sorunun çözümü olamaz. Bu da öğrencilerin eşitlik işaretini, iki tarafın birbirine eşit olmasından çok bir işlem yapıp sayısal bir değer elde edecekleri bir sembol olarak görmelerinden kaynaklanmaktadır (Kieran, 1992; Sfard, 1991).

Cebirin yabancı bir dil olduğu söylenebilir. Her sembolün bir anlamı vardır ve bu anlam çoğunlukla öğrenciye yabancıdır. Cebirin de polinom, fonksiyon gibi kelime haznesi, işlem sırası, özdeşlikler gibi ifade, cümle ve dilbilgisi kuralları olan bir dil olarak düşünülebilir. Dolayısıyla kişi cebir çalışırken ana dilini cebire, cebiri de ana diline çevirmelidir. Cebiri bir dil olarak kabul ettiğimize göre dil kazanımının yani cebir öğreniminin olabildiği kadar erken başlaması, öğrenciler için bir avantaj olacaktır (Usiskin, 1987).

2.3.3. Cebirin Öğretimindeki Eksiklikler ile İlgili Öğrenci Zorlukları

Sfard (1991) matematiksel objeleri işlemsel bilgi ve yapısal bilgi olmak üzere iki türlü elde edildiğini söylemekte ve bunu ‘matematiksel kavramların ikili doğası’ olarak ifade etmektedir. Sfard’ın bu teorisi Piaget’ye dayanmaktadır. İşlemsel bilgi, sayılar üzerinden yürütülen işlemlerin bilgisini içermektedir. İşlemsel bilgi boyutu, matematiksel işlemleri içerdiğinden sonuçta bir sayı elde edilmektedir (Kieran, 1992; Sfard, 1991). Örneğin; birinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklem verip bu denklemin bilinmeyenini herhangi bir sayısal değeri için çözümünü istemek, bu tarz bir bilgidir. Yapısal bilgi ise işlemlerin sayılar üzerinde değil cebirsel yapılar, ifadeler üzerinden yürütülmesi ile elde edilmektedir (Kieran, 1992; Sfard, 1991). Örneğin; $x+3y$ ifadesinin değerini $x=2a$ için bulmak, bu şekilde elde edilmiş bir bilgidir. Sfard’a göre (1991, 1995) kavramlar oluşturulurken, kavramlar öncelikle işlemsel boyutta elde edilmektedir. Yani kavram oluşumunda, süreçten objeye geçişten söz edilebilir ve bu her zaman kolay olmayabilir (Kieran, 1992).

Sfard’ın matematiksel kavramların ikili doğası teorisi çeşitli araştırmacılar tarafından farklı şekillerde ele alınmıştır; enstrümental-ilişkisel bilgi (Skemp, 1976), kavramsal-işlemsel bilgi (Hiebert & Lefevre, 1986), süreç- kavram (Gray & Tall, 1994), anlama yolu- düşünme yolu (Harel, 1998), prosedürel-kavramsal bilgi (Baroody, Feil & Johnson, 2007),

alışkanlıkla edinilmiş bilgi (*routine expertise*)- uyarlanabilen bilgi (*adaptive expertise*) (Hatano, 2003). Bu çalışmalarda, matematiksel bilgi/düşünme/anlama adlandırmaları kullanılmıştır. Ama kastedilen, matematiksel bilgidir. Dolayısıyla bu çalışmada da matematiksel bilgi olarak ele alınmıştır. Kullanılan adlandırmalar farklı olsa da söylenmek istenen aynıdır. Matematiksel bilgi, matematiksel işlemler içeren işlemsel bilgi ile kavramların birbirleri ile olan ilişkilerinden yola çıkılarak oluşturulan kavramsal bilgi boyutundan oluşmaktadır. Okullarda bilginin işlemsel boyutuna önem verildiği ve bundan dolayı öğrencilerin bilgilerinin ezberde kaldığı, kavramsallaştıramadığı bilinmektedir. Yapılması gereken ise öğrencide her iki bilgi türünün oluşturularak, bir bilgi türünün diğerini desteklediği ve gelişimini sağladığı öğretim ortamı oluşturmaktır. Ancak böyle yapılırsa, öğrencinin kavramsal bilgisini oluşturması sağlanmış olur.

Cebirde yaşanan zorlukların kökenine inilecek olunursa, sorun belki de öğrencinin kavram oluşturmaya başladığı yıllara kadar uzanmaktadır. Nitekim Sfard'a göre (1991) kavram oluşumu *interiorization* (yeni bir kavramın kazanılmasına neden olan ve daha düşük seviyeli matematiksel objelerin üzerinde yürütülen işlemlerin bilgisinin kavrandığı aşama), *condensation* (kişinin ayrıntılara takılmadan verilen kavramın bütünü hakkında düşünebildiği aşama), *reification* (yeni bir kavramın elde edildiği aşama) olmak üzere aşamalardan oluşmaktadır. Kavram oluşumunun son aşaması olan *reification* aşamasında öğrencilerin sorun yaşadıklarını belirtmektedir. Bu durum aslında çok şaşırtıcı değildir çünkü *reification* '*ontolojik bir değişim*' (s. 30) ifade etmektedir (Sfard, 1991). Matematiğin işlemlerinden oluşan aritmetik çalışmalarından sonra süreç ve objenin işin içine girmesi ile daha üst seviyeye geçilmesi, şüphesiz kolay bir geçiş değildir. Zaten her öğrencinin de bu süreci başaramadığı bilinmektedir. Bu süreç başarıldığı zaman, ilişkisel düşünme de başarılmış olmaktadır (Sfard & Linchevski, 1994). Öğrenciler ilişkisel düşünmeye başladıklarında verilen ifadeyi bütün olarak analiz etmekte, ifadedeki ilişkileri fark ederek yapısal yönü üzerinde çalışmaktadırlar. Böylece eşit işaretini, ilişkisel bir sembol olarak görebilmektedirler (Molina, Castro & Mason, 2008).

Cebir öğretiminde teknoloji kullanımının öğrenci açısından faydalı olduğu düşünülmektedir (Clements & Sarama, 1997). Wilson, Ainley ve Bills'e göre (2005) cebir öğretimi modelleme ve simülasyon içermelidir. Örneğin; öğrenciler çizdikleri fonksiyon grafiğinin değişkenlerini değiştirerek grafiğin nasıl değişeceğini, problem çözmek için bilgisayarın nasıl kullanılacağını, böylece bilgisayarın etkili bir şekilde nasıl kullanılacağını öğrenmiş olmaktadır. Soyut bir yapısı olan cebirin öğretiminde

elektronik tablo da kullanılabilir. Elektronik tablo kullanımı, değişkenlerle ilgili farklı matematiksel fikirlerin durumların gösterilip incelenmesi için zengin imkân sunmaktadır (Lew, 2004). Chiappini (2011) öğrencilerin aritmetikten cebire geçişte yaşadıkları zorlukların engellemek için teknolojiden faydalanmıştır. Kullandığı AlNuSet adlı bir yazılım sayesinde cebirin soyut sayısını görsel, uzamsal ve motor deneyimlerle öğrenciler için somut ve anlaşılır hale getirmiştir. Nobre vd. (2011) de benzer şekilde elektronik tablo kullanımının zor ve karmaşık olan cebir problemlerini daha anlaşılır hale getirdiğini, öğrencilerin değişkenler arasındaki ilişkileri daha kolay gördüklerini ayrıca Excel kullanarak kurallara ulaşmanın cebirsel düşünmeyi geliştirdiğini ifade etmişlerdir.

2.4.Cebir Öğretimi

Cebir, genel sayı ilişkilerini ve matematiksel yapıları sembolize eden, bunlar üzerinde işlem yapan, matematiğin alt alanıdır (Kieran, 1992). Cebirsel dil, kişinin kendisiyle ve başkalarıyla iletişim kurma yolu olan ana dilin öğrenimine benzemektedir. Cebir öğretiminin üç unsuru genelleme, denklem oluşturma ve çözme, fonksiyon ve formüllerle çalışmadır (Bell, 1995).

Çocukların öğrenemeyeceği düşüncesiyle cebir öğretimi, genellikle ortaokula ertelenmektedir. Oysa aritmetiğin genellemeler yapmak için zengin bir içeriğe sahip olduğu düşünülürse ve bu anlamda cebirsel boyutu dikkate alınırsa, cebir öğretiminin daha erken yaşlara çekmek gerektiği açıktır (Carragher, Schliemann & Brizuela, 2001). Yapılan çalışmalarda ilkökul çocuklarının bilinmeyen üzerinde çalışabildikleri ve bilinmeyenin anlamını kavradıkları görülmüştür (Carragher, Schliemann & Brizuela, 2001). NCTM (2000) de öğrencilerin erken yaşlarda cebir çalışmalarına başlamaları gerektiğini rapor etmektedir. Çünkü sınıflama, sıralama, benzer özellikleri fark etme gibi eylemler çocukların erken yaşlarda yapabildikleri ve ilgi çekici buldukları eylemlerdir.

Bell'e göre (1995) cebir öğretimi genelleme, denklem çözme, fonksiyonları incelemeyi gerektiren kavram ve yeteneklerin derinlemesine incelenmesini sağlayan, bilişsel çatışma içeren problemler yoluyla kritik kavramların derinlemesine analiz edildiği bir şekilde öğretilmelidir. Bu şekilde yapılan öğretim, tanılayıcı (*diagnostic*) öğretim olarak nitelendirilebilir. Çeşitli durumlar vasıtasıyla gerçekleşecek olan dengesizlik-denge durumu öğrencilerin cebirsel kavramların önemini anlamasını, kavramları derinlemesine

analiz etmesini, cebirin yapısını anlamalarını ve cebirsel düşünmelerini gerçekleştirmesini sağlamaktadır (Bell, 1988).

Linchevski (1995) okul cebirinin değişkenler ve cebirsel ifadelerin sadeleştirilmesi, genelleme, yapı, denklemler ve sözel problemlerden oluşması gerektiğini ifade etmiştir. Kieran (2004b) ise okul cebirinin içeriğinin, genel olarak *generational*, dönüşümsel (*transformational*), *global/meta* seviyesindeki eylemler olmak üzere üç başlık altında incelenebileceğini ifade etmiştir. *Generational* eylemler, nicel problem durumlarını gösteren bilinmeyenleri içeren denklemler, geometrik örüntü ya da sayı dizilerinin genelleme ifadeleri, sayısal ilişkilerin kurallarını belirten ifadelerdir. Bu cebirsel ifadelerin ve denklemlerin temelinde değişkenler ve bilinmeyenler vardır. Dönüşümsel (*transformational*) eylemler, cebirsel ifadeleri sadeleştirme, denklem ve eşitsizlikleri çözme içermektedirler. Bu eylemlerle ifadeleri ya da denklemleri dönüştürmenin amacı eşitliği korumak ve çözüme ulaşmaktır. *Global/meta* seviyesindeki eylemler ise cebire özgü olmayan ancak cebirin kullandığı problem çözme, modelleme, değişimi ve ilişkileri analiz etme, genelleme, ispatlama gibi becerilerdir. Kieran'ın önerdiği bu üç bileşen, cebirsel bilginin işlemsel ve kavramsal yapısı bazında ele alınabilir. Zira *generational* ve *transformational* eylemler denklemleri, cebirsel ifadeleri, değişkenleri, bilinmeyenleri ve istenen çözüme ulaşmak amacıyla yapılan işlemleri içermektedir. O halde okul cebiri *generational* ve *transformational* eylemler kapsamında ele alınan işlemsel bilgileri içermelidir. Öte yandan *global/meta* seviyesindeki eylemleri de (ispatlama, modelleme, genelleme gibi) kavramsal boyutta ele alabiliriz. Dolayısıyla okul cebiri işlemsel bilgi ve kavramsal bilginin gelişimini amaçlamalıdır. Ancak bu şekilde bir cebir öğretimiyle kavramsal öğrenmenin gerçekleşmesinden bahsedilebilir. NCTM 'nin (2000) cebir standartlarında ilkökul ve ortaokul öğrencilerinin *örüntüleri, ilişkileri, fonksiyonları anlayabilmeli; matematiksel yapıları cebirsel sembol kullanarak gösterebilmeli ve analiz edebilmeli; nicel ilişkileri anlamlandırıp göstermek için matematiksel modelleri kullanabilmeli ve farklı içeriklerde değişimi analiz edebilmeli* (s. 37) şeklinde verilmektedir.

MEB (2013) tarafından yayımlanan ortaokul matematik dersi 5-8. sınıflar öğretim programında 5. sınıf hariç diğer sınıflarda cebir öğrenme alanı eklenmiştir.

Cebir öğrenme alanına ilişkin kazanımlar ilk olarak 6. sınıfta yer almaktadır. Bu sınıf seviyesinde öğrencilerden aritmetik dizilerde istenilen terimi bulmaları, cebirsel ifadeleri anlamlandırmaları ve cebirsel ifadelerde toplama ve çıkarma işlemlerini yapmaları hedeflenmektedir. 7. sınıfta iki alt öğrenme alanı vardır: eşitlik ve denklem ve doğrusal denklemler. Bu sınıf düzeyinde öğrencilerin genel olarak eşitlik kavramını anlamaları ve

birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri ve ilgili problemleri çözmeleri beklenmektedir. Ayrıca koordinat sistemi özellikleri ile tanınır, aralarında doğrusal ilişki bulunan değişkenler farklı ortamlarda incelenir ve doğrusal denklemlerin grafikleri çizilir. 8. sınıfta cebir öğrenme alanına çok daha geniş yer verilmektedir. Bu seviyede cebirsel ifadeler ve özdeşlikler, doğrusal denklemler, denklem sistemleri ve eşitsizlikler konuları işlenmektedir. Öğrencilerin cebirsel ifadeleri ve özdeşlikleri anlamaları ve cebirsel ifadeleri çarpanlara ayırmaları beklenir. Bunlara ek olarak iki değişken arasındaki doğrusal ilişkinin incelenmesi ve denklem çözümleri yer almaktadır. Ortaokul cebir konuları iki bilinmeyenli denklem sistemlerinin çözümü ve bir bilinmeyenli eşitsizliklerin incelenmesi ile sona ermektedir (s. xi).

Yürürlükte olan 1-4. sınıflar ve 5-8. sınıflar matematik öğretim programları incelendiğinde, şunları söylemek olasıdır: Öğrencilere 1-4. sınıflar boyunca örüntü ve süslemeler konusunda çalışmalar yaptırıldıktan sonra 5. sınıfta herhangi bir cebir çalışmasına rastlanmadığı görülmektedir. 6. sınıfa gelindiğinde ise cebirsel ifadenin ne olduğundan bahsedilip örüntünün kuralı buldurtulmaktadır. Dahası önceden sözel problemi cebirsel olarak ifade etme ile ilgili bir deneyim oluşturmamışken, harfler ile işlem yapmaları beklenmektedir. Böylece öğrenciler aritmetikten cebire geçişte alan yazının da işaret ettiği gibi zorluk çekilen kavramlardan biri olan değişken kavramıyla tanışmış olmaktadır. Zorluk çekilen bir diğer kavram olan eşitlik kavramı ise alt öğrenme alanı olarak 7. sınıfta yer almaktadır. Bu sınıf seviyesinde ise eşitliğin kavramsal boyutundan çok işlemsel boyutu üzerine olduğu görülmektedir. 8. sınıfa gelindiğinde ise oldukça yoğun bir cebir programı ile karşılaşmaktadır. Öğrenciye birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem verilip ardından iki bilinmeyenli doğrusal denklem sistemlerine geçilmekte ve bunları çözüp grafik ile göstermeleri beklenmektedir. Sonrasında daha önce bir deneyimin olmadığı eşitsizlik kavramını zihninde oluşturulması, eşitsizliği sayı doğrusunda gösterilmesi ve bu eşitsizliğin çözülmesi beklenmektedir. Cebirde karşılaşılan öğrenci zorlukları ile ilgili alan yazının işaret ettiği '*cebirsel zorluklar*' düşünüldüğünde 5-8. sınıflar matematik öğretim programının bilginin oluşum süreci ve cebirsel düşünmenin gelişimi dikkate alınarak revize edilmesi önerilebilir. Ancak 2016-2017 eğitim öğretim yılında uygulanacak olan 1-4. sınıfların matematik öğretim programında meydana gelen olumlu değişimlerin ışığında, 5-8. sınıflar öğretim programında cebir adına olumlu gelişmeler olacağı da ön görülebilir. Her ne kadar bu çalışmanın amacı matematik öğretim programını analiz etmek değilse de öğrencilerin cebirsel düşünme kapsamında genelleme süreçlerinin incelendiği böyle bir çalışmada, matematik öğretim programını analiz etmeden ve onların nasıl bir matematik öğretimi aldıklarını irdelemeden, öğrencilerin genelleme süreçlerine dair yorum yapmanın anlamlı olmayacağı düşünülmektedir.

18.03.2016 tarihinde yayınlanan ve 2016-2017 eğitim öğretim yılında uygulanacak olan 1-4. sınıflar ilköğretim matematik dersi öğretim programında cebir öğrenme alanı açısından

büyük değişiklikler söz konusudur. Daha önceki 1-5. sınıflar ilköğretim matematik dersi öğretim programında cebir çalışmalarının, geometri öğrenme alanının içindeki ‘örüntü ve süslemeler’ alt öğrenme alanındaki çalışmaları ile sınırlı olduğu görülmektedir (MEB, 2009). Ancak yeni 1-4. sınıflar ilköğretim matematik dersi öğretim programında 1. sınıftan 4. sınıfa kadar sayılar ve işlemler öğrenme alanının içinde ‘cebire geçiş’ alt öğrenme alanı olarak verilmektedir.

Cebire geçiş alt öğrenme alanı; örüntüler, matematiksel ifadeler, genellemeler, değişken ve birlikte değişme kavramları üzerine yoğunlaşmıştır. Bu öğrenme alanındaki kazanımlar bulundukları sınıf seviyesindeki diğer kazanımlarla ilişkilendirilmelidir. Örneğin, dört işlem arasındaki ilişkilerin fark edilmesi aynı zamanda erken cebir düşünce yapısının gelişmesini de destekleyecektir. Cebirsel düşüncenin gelişiminin cebir konularının öğretileceği üst kademe seviyesine kadar beklenmeden geliştirilmesi gerekir (MEB, 2015, s. 11).

Programda sayılar ve işlemler, geometri, ölçme ve veri olmak üzere 4 öğrenme alanı bulunmaktadır. İncelendiğinde her bir öğrenme alanının, cebire geçiş alt öğrenme alanı içerdiği görülebilir. Böylece her konunun bir şekilde cebir ile ilişkilendirilerek öğrencide cebirsel düşünmenin erken yaşta gelişimi planlanmaktadır. Bunun önemli bir gelişme olduğu düşünülmektedir. Zira Usiskin (1987) de iyi bir şekilde aritmetik, cebir öncesi, geometri öncesi dersi alan 7. sınıfların, bu dersleri almamış 9. sınıflara göre daha iyi cebir öğrendiklerini ifade etmiştir.

1.sınıftaki cebire geçiş konuları sayı örüntülerini tanıma ve kurallarını bulmayı içermektedir. 2. sınıfta ise örüntü kuralını genişletme çalışmalarına, eşit işaretinin kavramsal anlamını oluşturma eklenmektedir. Böylece öğrencinin eşitlik kavramının matematiksel ifadelerin birbirine eşit olması anlamını oluşturarak ilişkisel öğrenmeyi gerçekleştirme yolunda ilk adımı atmış olacaktır. Ayrıca bu sınıf düzeyinde önemli görülen bir kazanım daha vardır ki basit aritmetik işlem gerektiren problemlerdeki cebirsel ilişkileri sözel olarak ifade etmedir. Böylece sonraki yıllarda semboller için içine girdiğinde, öğrencinin bu geçişi kolaylıkla başaracağı düşünülmektedir. 3. sınıfta ise bir önceki yılın cebir konularının genişletildiği görülebilir. Bu sınıf seviyesinde öğrencinin sayı örüntüsünün kuralını kendisinin oluşturma ve eşitlik durumunda verilen iki matematiksel ifadede verilmeyen değerin bulunması beklenmektedir. Ayrıca ilişkisel düşünmenin gelişmesinde önemli bir kazanım olan sayı tablolarının kullanıldığı çalışmalar da yine bu sınıf seviyesinde görülmektedir. Sayı tabloları sayılar arasındaki ilişkinin fark edilip yorumlandığı araçlar olması sebebiyle, ilişkisel düşünmenin gerçekleştirilmesi için imkân sunmaktadırlar (Van de Walle, Karp & Williams, 2003, s. 425). 4. sınıfta ise bu çalışmalar genişletilerek öğrenciden tekrarlayan, büyüyen, küçülen sayı örüntülerini fark etmeleri,

kuralını ifade etmeleri ve sonraki adımı bulmaları beklenmektedir. Ayrıca eşit işaretine dair kavramsal bilginin oluşması için de etkinlikler yapılmaktadır. Şu anda 5-8. sınıflarda uygulanmakta olan cebir öğrenme alanının alt öğrenme alanları ve 2016-2017 eğitim öğretim yılında uygulamaya konulacak olan cebire geçiş alt öğrenme alanına ait kazanımlar aşağıdaki şekilde görülmektedir.

Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanında Cebire Geçiş Alt Öğrenme Alanına Dair Kazanımlar	
1. SINIF	Tek kuralı sayı örüntüsünü tanıtar, örüntünün kuralını bulur. Bir sayı örüntüsünde eksik bırakılan öğeyi belirleyerek örüntüyü tamamlar.
2. SINIF	Kuralı tek işlem gerektiren sayı örüntüsünü genişletir. Eşit işaretinin matematiksel ifadeler arasındaki 'eşitlik' anlamını fark eder. 20'ye kadar olan sayılarla toplama veya çıkarma işlemi gerektiren problemlerdeki çokluklar arasındaki cebirsel ilişkileri sözel olarak ifade eder.
3. SINIF	Bir sayı örüntüsü oluşturur. Aralarında eşitlik durumu olan iki matematiksel ifadeden birinde verilmeyen değeri belirler ve eşitliğin sağlandığını açıklar. 6'ya kadar çarpım tablosundaki sayıları kullanarak çarpma işleminde çarpanlardan biri bir arttırıldığında çarpma işleminin sonucunun nasıl değiştiğini fark eder.
4. SINIF	Kuralı en çok iki farklı işlem içeren sayı örüntüsündeki kuralları belirler ve örüntüyü genişletir. Tekrarlayan, büyüyen ve küçülen sayı örüntülerini oluşturur ve tanımlar. Aralarında eşitlik durumu olmayan iki matematiksel ifadenin eşit olma için yapılması gereken işlemleri açıklar. Çarpma işlemi gerektiren problemlerdeki çokluklar arasındaki ilişkileri tablo ile gösterir ve genişletir.



	Örüntü ve İlişkiler	Cebirsel İfadeler ve Özdeşlikler	Eşitlik ve Denklemler	Doğrusal Denklemler	Denklemler Sistemleri	Eşitsizlikler
5. SINIF	X	X	X	X	X	X
6. SINIF	X					
7. SINIF	X					
8. SINIF	X					

Şekil 2. Uygulanmakta olan 5-8. sınıflar cebir konularına, 2016-2017 öğretim yılında yürürlüğe giren 1-4. sınıflar cebir konularının entegre edilmesi

1-4. sınıflar ilköğretim matematik öğretim programı incelendiğinde cebire geçişe yönelik olumlu çalışmaların olduğu düşünülmektedir. Her öğrenme alanının cebire geçiş çalışmalarıyla desteklenmesi, öğrencinin matematiğin öğrenme alanları arasındaki ilişkiyi görebilmesi ve ilişkilendirmeyi yapabilmesi açısından önemlidir. Böylece öğrencinin bir derste öğrendiği bir bilgiyi bir başka derste öğrendiği bilgiye transfer etmesi beklenmektedir. Sarama ve Clements'e göre (2009) öğrenciler, eşit işaretini genelde 'bir işlem yap, bir sayı elde et' komutu olarak algıladıkları için özellikle aritmetikten cebire geçişte bir takım zorluklar yaşadıkları bilinmektedir. İlkokul seviyesinde eşitliğin kavramsal boyutu ile ilgili olan çalışmaların bu zorluğu en aza indirgeyeceği ön görülebilir. Bu çalışmalarla öğrencide cebirsel düşünme ve ilişkisel düşünmenin gelişiminin de destekleneceği düşünülmektedir. Cebirsel düşünmenin gelişimi, çocukların matematiksel gelişimi için önemli olarak görülen örüntülerin tanınip analiz edilmesi ile

oldukça ilgilidir (Sarama & Clements, 2009). Dolayısıyla örüntü çalışmalarıyla öğrencilerin erken yaşlarda karşılaşmalarının, onların genelleme yapma becerilerine ve matematiksel düşünmelerine olumlu katkılar sağlayacağı söylenebilir (Hunter, 2010; Orton & Orton, 1999). Ayrıca cebirsel ifadelerin sözel olarak ifade edilip cebirsel ilişkilerin irdelenmesi, öğrencinin değişken kavramını zihninde oluşturmaya başlaması ve aritmetikten cebire geçiş sürecinde yaşanması olası sorunları aza indirgeyeceği de iddia edilebilir.

2.5. Cebirsel Düşünme

Cebirsel düşünme örüntüleri tanıma, sayılar, objeler ve geometrik şekiller arasındaki matematiksel ilişkileri inceleme ile ilgili olduğundan matematiksel düşünmeye temel teşkil etmektedir (Windsor, 2009). Problem çözümlerinde örüntüleri tanımlayıp kullanma, yeni kavramları anlama matematiksel düşünmenin özüdür. Sayısal, şekilsel ya da nesnelerin oluşturduğu örüntü ve ilişkilerin fark edilmesi, tanımlanması, devam ettirilmesi ve oluşturulması cebirsel düşünmenin dolayısıyla matematiksel düşünmenin varlığını göstermektedir. O halde cebirsel düşünmenin, matematiksel ilişkiler üzerine yoğunlaştığı söylenebilir. Cebirsel düşünme model, tablo, grafik ya da diyagramlarla verilmiş örüntüleri fark etme; örüntüyü oluşturan kuralı ifade etme ve bu kuralı sembollerle ifade etmeyi gerektirmektedir (Booker, 2009).

Cebirin ifade ettiğinden daha geniş bir anlama sahip olan cebirsel düşünme, sadece cebir çalışmalarıyla sınırlı değildir (Akkan, 2016). Cebirsel düşünme, içinde yaşadığımız dünyayı anlamlandırmamız için katkıda bulunmaktadır; karışık matematiksel kavramları anlamak için bilişsel stratejiler geliştirmemizi sağladığından mevcut matematiksel bilgimizin üzerine inşa edilmektedir. Cebirsel eylemlerde, öğrenciler sadece sayısal bir cevabı bulmak yerine nesneler arasındaki ilişkileri görme ve bu ilişkileri genelleme eylemi içindedirler (Windsor, 2009). Dolayısıyla cebirde başarılı olmak için öğrencinin genelleme, soyutlama, analitik düşünme, dinamik düşünme, modelleme ve organize etme gibi yeteneklerinin gelişimine yardımcı olmak gerekliliği açıktır (Lew, 2004).

Cebirsel düşünmenin varlığı, öğrencilerin sayılar üzerinde düşünmenin ötesine geçerek ilişkileri, değişimleri analiz etmeleri ve bunu genellemelerle ifade etmeleri ile gerçekleşmektedir. Zira aritmetikten cebire geçiş süreci sayılardan çok harflerle işlem yapmayı gerektirmektedir (Freudenthal, 2002). Değişimlerin ve genellemelerin grafikte,

sembolle, sözel olarak, tablo ya da diyagramla ifade edilmesinde cebirsel düşünmenin gelişimi için önemli olarak görülmektedir (Cañadas, Castro & Castro, 2011). Bu konuda yapılmış önemli çalışmalardan biri, Cobb ve arkadaşları (1997) tarafından yapılan çalışmadır. Cobb ve arkadaşları uyguladıkları öğretim deneyinde, öğrencilere 5 maymunun biri kısa diğeri uzun olan iki ağaca nasıl tırmanabileceklerini sormuşlardır. Öğrenciler olasılıkları düşündükten sonra 2 maymunun uzun ağaca, 3 maymunun kısa ağaca; birinin uzun ağaca ve 4'ünün kısa ağaca ya da hepsinin uzun ağaca tırmanabileceği gibi cevaplar vermişlerdir. Öğretmen, verilen cevapları tahtada tablo haline getirmiş ve öğrencilere maymunların iki ağaçta bulunmaları ile ilgili başka durumların olup olamayacağını sormuştur. Bunun üzerine bir öğrenci tablodaki sayılar arasındaki ilişkiyi yorumlamış ve sayı ikililerinin toplamının maymun sayısına eşit olduğunu ifade etmiştir. Bu durumda öğrencinin odağı tek tek sayılar yerine sayılar arasındaki ilişkiyi yorumlama olduğundan, öğrencinin sayısal düşünmenin ötesine geçerek cebirsel düşündüğü şeklinde yorumlanmıştır. Yapılan bir diğer çalışma ise Joram, Hartman ve Trafton (2004) tarafından yapılan çalışmadır. Joram, Hartman ve Trafton, öğrencilerin cebirsel düşünmelerini geliştirmek için ölçme, doğrusal ilişki ve veri analizi konularını entegre ederek öğrencilere uygulamışlardır. Böylece cebir dersinin diğer konularla ilişkilendirilmesi de amaçlanmıştır. Bu çalışmada 2. ve 4. sınıf öğrencilerinin boylarını ölçerek tahtaya yazmaları istenmiştir. Böylece her iki sınıftan öğrencilerin yaşları ve boylarını içeren bir tablo oluşturmuşlardır. Bu değerler ayrıca grafikte gösterilmiştir. Böylece öğrenciler, 'insanlar büyüdükçe, boyları uzar' yorumunu yaparak, yaş ve boy uzunluklarının nasıl değiştiğini ve bu değişimin arasındaki ilişkinin nasıl olduğunu fark etmişlerdir. Joram ve arkadaşları, bu çalışmalarında hem cebir konularının diğer konularla ilişkilendirmesinin hem de çoklu gösterimlerin cebirsel etkinliklerin anlaşılmasını kolaylaştırdığını ifade etmişlerdir. Bu şekilde hazırlanan derslerin öğrencilerin matematiksel ve cebirsel düşünmelerini zenginleştireceğine de vurgu yapmışlardır. Öğrencilerin veriler toplaması ve verilerdeki örüntülerin fark edilmesi, verilerdeki ilişkilerin yorumlanması ile bir sonuç elde edilmektedir. Dolayısıyla veri analizi de cebirsel düşünmenin gelişiminde önem kazanmaktadır (Bay-Williams, 2001).

Sembollerin kullanılması ve bunların cebirsel kurallara uygun ve doğru bir şekilde gösterilmesi ise cebirsel düşünmenin göstergesi olan diğer bir husustur. Cebirsel düşünmeyi tarif ederken özel bir örnekte geneli görme yani genelleme yeterli değildir. Cebirsel düşünmenin varlığından bahsedebilmek için onu cebirsel olarak ifade etmek de gereklidir (Kieran, 1989). Bu konuda yapılmış bir çalışmada, Clement, Lochhead ve Monk

(1981) üniversite öğrencilerine ‘S öğrencilerin sayısını ve P profesörlerin sayısını göstermek üzere, bir üniversitede profesörlerin sayısının 6 katı kadar öğrenci varsa, S ve P değişkenlerini kullanarak bir denklem yazınız’ şeklinde bir soru sormuşlardır. Öğrencilerin yarısına yakın bir kısmı $S=6P$ yerine $P=6S$ cevabını vermişlerdir. Öğrencilere, $S=6P$ denklemindeki S ve P’nin ne anlama geldiği sorulduğunda ise bu harflerin öğrenci/öğrencilerin ya da profesör/profesörlerin kısaltması olduğunu belirtmişlerdir. Oysa S öğrencilerin sayısını gösteren değişken, P ise profesörlerin sayısını gösteren değişkendir. Dahası S harfinin ‘profesörü’ temsil ettiğini söyleyen her öğrenci, P harfinin ‘profesör, profesörler, profesör sayısını’ temsil etmediğini söylemektedir. Burada görüldüğü gibi öğrenciler, cebirsel sembollerin anlamlandırılmasında ve gösterilmesinde ciddi anlamda sıkıntı yaşamaktadırlar (Rosnick, 1981). Sembollerin anlamlandırılması, zihinde gerçekleşen içsel bir süreç olduğundan ve sembollerin gösterilmesi de bu süreç sonucunda anlamlandırılan bilginin yazıya dökülmesi olduğundan, cebirsel düşünmenin önemli bir göstergesidir (Clement, 1982).

2.5.1. Cebirsel Düşünmenin Gelişimi

Cebirsel düşünmenin gelişimi, çocukların matematiksel gelişiminin önemli bileşenleri olan örüntülerin tanınması ve analiz edilmesine bağlıdır. Örüntü sıralama, tutarlılık ve organize edilmemiş durumlarda tahmin edilebilirlik gerektiren matematiksel düzen ve yapı çalışması olarak ele alınan cebirsel düşünme, direk ulaşılabilen bilginin ötesinde genelleme yapmayı kolaylaştırmaktadır (Sarama & Clements, 2009, s. 319).

2.5.1.1. Piaget’ye Göre Cebirsel Düşünmenin Gelişimi

Piaget’ ye (1964, s. 22-23) göre bilgi ve dolayısıyla matematiksel bilgi, fiziksel deneyimlerle ve mantıksal-matematiksel deneyimlerle olmak üzere iki yolla elde edilmektedir. Objeler, fiziksel görünüşlerine göre diğer objelerden soyutlanarak, onlarla ilgili fiziksel deneyimler oluşturulmaktadır. İki nesnenin boylarının kıyaslanmasıyla elde edilen bilgi, bu tarz bir bilgidir. Piaget, 5 yaşlarında bir çocuğun taşları saymasını gözlemlemiştir. Çocuk, taşı 1’den 10’a kadar saymış ve 10 tane taş olduğunu bulmuştur. Sonra ters yönde sayarak yine 10 tane taş olduğunu bulmuştur. Taşların diziliş şeklini değiştirerek saydığında yine 10 tane taş olduğunu ifade etmiştir. Çocuğun elde ettiği bilgi, toplam taş sayısının, taşların dizilişinden bağımsız olduğudur. Böylece çocuk bilgisini

mantıksal-matematiksel deneyimiyle elde etmiştir (Piaget, 1964). Mantıksal-matematiksel deneyimlerle elde edilen bilgiler, yansıtıcı soyutlama yoluyla kazanılmaktadır. Çünkü bu bilgiler, kişinin eylemleri ve işlemleri sonucu elde edilmiştir. Objenin fiziksel özelliklerinin diğer objelerden soyutlanarak elde edilen bilgi ise deneysel soyutlama yoluyla elde edilen bir bilgi türüdür. Fiziksel deneyimlerle elde edilen bilgiler de deneysel soyutlama yoluyla oluşturulmaktadır (Steffe, 1991). Bunlara ek olarak objelerin adları, tatillerin tarihleri gibi diğer insanlarla iletişimin sonucu kazanılan sıradan (*conventional, arbitrary knowledge*) bilgiler de tanımlanmaktadır (DeVries, 2000).

Piaget'nin öğrenme teorisine göre öğrencinin yeni bilgiyi elde etmek için yeterli ön bilgisi olmalıdır. Öğrenci yeni bilgiyi mevcut bilişsel yapının içine almakta ve özümseme gerçekleştirmektedir. Öğrencinin yeni bilgiyi alabileceği yeterli bilişsel yapısı yoksa o zaman mevcut bilişsel yapısında daha ciddi bir değişim gereklidir ki bu da düzenleme sürecidir (Piaget, 1970). Kavramsal öğrenmenin gerçekleşmesi için bilginin öğrencinin mevcut bilgisi ve deneyimiyle ilişkilendirmesi gerekmektedir. Çünkü zihinlerinde dengesizlik meydana geldiği zaman, öğrenciler geçmiş deneyimleri ve sezgileri yoluyla dengeleme oluşturmaya çalışmaktadırlar. Ayrıca matematik eğitiminin amacı, deneysel soyutlamadan çok yansıtıcı soyutlama olmalıdır. Eğer böyle yapılırsa, öğrenciler bilgileri ezberleyerek değil de problemin çözümündeki her bir matematiksel ilişkiyi soyutlayarak öğrenirler. Edindikleri yeni bilgileri kendi zihinsel yapılarına eklerler ve sonraki bilgilerin oluşturulmasında, gerekli ilişkilendirmeleri yaparlar (Zembat, 2007).

2.5.1.2. Vygotsky'e Göre Cebirsel Düşünmenin Gelişimi

Matematik eğitiminde geleneksel olarak cebirin, aritmetik çalışmalarını izlediği görülmektedir. Ancak Vygotsky bunun tersinin olması gerektiğini iddia etmektedir. Örneğin; “tabakta N elma var. R kişi birer elma aldı. Kaç elma kaldı?” şeklinde bir soruyu 1. sınıf öğrencilerine sormuştur. Öğrenciler soruyu analiz ettikten sonra, N'nin bütünü, R'nin parçayı temsil ettiğini kavramışlardır. Burada yapmaları gereken, bütünü oluşturan diğer parçayı yani N-R'yi bulmaktır. Böylece öğrencinin zihninde bütünün parçalardan oluştuğu şeması oluşmuştur. Öğrenciler, bu teorik bilgiyi edindikten sonra gerçek sayılarla işlem yapabilirler. Böylece cebir, aritmetiğin genelleştirilmiş hali olarak değil de nicelikler ve özellikleri arasındaki ilişkilerin genellemesi olarak öğretilmiş olacaktır. Dolayısıyla zihinde bilginin soyut halinin somut hale geçişi gerçekleşmiş olacaktır. Bu örnekte Vygotsky'nin cebirsel düşünmenin gelişimiyle ilgili söylediği üç temel özellik

görülmektedir. Bunlar genellenen kavramsal bilginin gelişimi, soyuttan somuta yükselmesi, psikolojik araçların (şemanın) edinilmesidir (Schmittau, 2011).

Vygotsky'ye (1986) göre genellikle çocukların aritmetik kavramları olan ön kavramlarından (*preconcepts*) ergenlerin cebirsel kavramlar gibi gerçek kavramlara geçişi, erken dönemlerdeki genellemelerle elde edilmektedir. Cebirsel kavramlar, objelerin değil sayıların genellemesi ve soyutlanması ile oluşturulmaktadır. Dolayısıyla cebirsel kavramların kazanılması, daha üst düzey bir düşünme gerektirmektedir. Bireyi bu daha üst düşünme seviyesine genellemeler getirmektedir. Bu cebirsel kavramları oluşturan bireyler de aritmetiğe daha geniş bir perspektiften bakabilmektedirler (Vygotsky'den aktaran Schmittau, 2011). Vygotsky'e göre (1986) kavram “hafıza tarafından oluşturulur ve zihinsel bir alışkanlıktan çok daha fazlasıdır. Pratikte öğreilmeyecek kadar karmaşık ve bireye özgü bir düşünce eylemidir” (Vygotsky'den aktaran Shayer, 2003). Kavramlar, kişinin fikirleriyle ilgili geçirdiği deneyimler sonucunda ulaştığı genellemelerdir. Bu genellemeler yani kavramlar kişinin iletişim ihtiyacından doğmaktadır (Vygotsky, 1986).

Ausubel'e (1968) göre ön kavramlar değişime direnç göstermektedirler ve zor değişmektedirler (Ausubel'den aktaran Linchevski, 1995). Ancak ön kavramlar, kavramların öğrenilmesi için önemli ve gereklidirler. Bununla birlikte cebir öncesi, daha soyut ve karmaşık kavramların öğrenilmesi için önkoşul olan daha somut ön kavramların öğrenilmesi için imkân sağlamaktadır. Kavramların oluşumunda önemli olduğu için, ön kavramların doğru bir şekilde oluşumu sağlanmalıdır (Linchevski, 1995). Alan yazın incelendiğinde öğrencilerin yeni matematiksel kavramlar kazanmak için, işlemsel bilgi edindikleri görülmektedir. Daha sonra işlemsel bilgidan yapısal bilgiye geçilmektedir (Kieran, 1992). Sfard (1991) kavram gelişimi için üç aşama önermiştir. Bu aşamalar, i) *interiorization*, düşük seviyeli matematiksel objeler arasında gerçekleşir ve mevcut matematiksel objelerle yürütülen bir süreçtir; ii) *condensation*, işlemlerin tamamını yeni bir kavram oluşturmak üzere kavrama, bu süreç işlemsel ya da prosedürel olarak anlaşılana kadar sürer; iii) *reification*, kavramın kazanıldığı aşama, daha önceden bilinen kavrama başka bir açıdan bakma, niteliğini artırmadır. *Interiorization* ve *condensation* kademeli gerçekleşen bir süreç iken *reification* birden bire sıçrama şeklinde gerçekleşen bir süreçtir (Kieran, 1992; Sfard, 1991).

Vygotsky, çocuğun matematiksel gelişiminden ziyade matematiğin kültürel-tarihi gelişimini incelemektedir. Bu noktada, Piaget ve Vygotsky birbirinden ayrılmaktadır. Piaget, sosyal-kültürel gelişimin önemini reddetmez ama ona göre gelişim önce bireyin

zihninde gerçekleşmektedir. Bunun sonrasında sosyal-kültürel anlamda bir gelişimden bahsedilebilir. Ancak Vygotsky, bunun tam tersini iddia etmektedir; gelişim önce sosyo-kültürel boyutta sonra bireysel boyutta incelenmektedir (DeVries, 2000).

Amit ve Neria (2010) matematiksel düşünmenin gelişimini dört aşamada incelemektedir. Bu aşamalardan ilki olan prosedürel aktivitede (*procedural activity*), öğrenciler şekillerin arasındaki sabiti fark edip bununla işlem yapmaktadırlar. Bu aşamada yapılan tek genelleme ‘sabiti bütün terimlere ekle’ şeklindedir. Yakın genellemeler kolaylıkla yapılabilmektedir. Bir sonraki aşama olan prosedürel anlama (*procedural understanding*), örüntünün kuralı sözel olarak ifade edilmektedir (Amit & Neria, 2010; Garcia-Cruz & Martinon, 1998). Öğrenci örüntünün kuralını bulup uzak genellemeler için bir çözüme ulaştığında bir sonraki aşama olan fonksiyonel ilişki (*searching for a functional relationship*) aşamasına geçmiş olmaktadır. Son aşama ise fonksiyonel ilişkinin anlaşılıp cebirsel olarak (*formal algebraic way*) ifade edilmesini içermektedir (Amit & Neria, 2010).

Cebirsel düşünmenin gelişiminin, matematiksel düşünmenin gelişimine benzer şekilde aşamalardan oluştuğunu iddia eden Twohill (2013), beş aşamadan oluştuğunu öne sürmüştür. Bu aşamalar; ön-formal örüntü (*pre-formal pattern*), informal örüntü, formal örüntü, genelleme, soyut genellemedir. Ön-formal örüntü aşamasında öğrenciler örüntüleri tanınamakta ve fark edememektedirler. Cebirsel aktiviteler örüntülerle başlamaktadır. Öğrencilerin bu aşamayı tamamlayıp informal örüntü aşamasına geçmeleri için genişleyen ya da tekrar eden örüntüleri fark etmeleri, tekrar eden örüntülerin benzerliklerini ifade etmeleri beklenmektedir. Bir sonraki aşama olan formal örüntü aşamasında, öğrenciler örüntüyü sözel olarak açıklayabilmekte ve yakın terimler hakkında akıl yürütebilmektedirler. Bunun için de terimler ve terimlerin dizideki yerleri arasındaki ilişkiyi fark edebilmelidirler. Bu gelişim aşamalarının sadece örüntüyü tanıma ile ilgili beceriler içerdiğine dair bir iddia bulunmamaktadır. Ancak çoğunlukla okul cebirinin ilk yıllarında cebire giriş olarak örüntüler verilmektedir. Örüntüdeki kuralı fark ederek terimler arasındaki matematiksel ilişkiyi açıklayabilen öğrenci, bir sonraki aşamada bunu matematiksel olarak ifade etmektedir. Genelleme aşamasında öğrenci yakın terimi ve uzak terimi bulduktan sonra, örüntünün kuralını ifade edebilmektedir. Bir sonraki aşama olan soyut genelleme aşamasında öğrenci artık cebirsel olarak düşünebilmektedir. Bu seviyedeki öğrenci kolaylıkla genelleme yapabilir, bunu sembolik olarak gösterebilir, matematiğin diğer alanlarına uygulayabilir (Twohill, 2013). Cebirsel olarak düşünebilen

öğrenciler sayısal işlem yapmakla kalmayıp bunlar arasındaki ilişkileri görebilirler, işlemlerini yaparken matematiksel sembol ve gösterimlere dikkat ederler, bilinmeyen, değişken ya da parametre olarak harflerle işlem yapmakta sıkıntı çekmezler (Kieran, 2004a).

Godino ve arkadaşları (2014) öğrencilerde cebirsel düşünmenin gelişimini ilköğretim öğrencileri ve orta öğretim öğrencileri bazında incelemişlerdir. Buna göre ilköğretim öğrencilerinde cebirsel düşünmenin gelişimi üç basamakta incelenmektedir (Godino vd., 2014). Bir başka çalışmada da Godino ve arkadaşları da (2014) bu seviyelere hiçbir cebirsel aktivitenin yer almadığı 0. seviyeyi de eklenmişlerdir. 1. seviyede işlemlerin özellikleri ve ilişkiler tanınmaktadır. Ancak işlemler sembollerle değil de aritmetik düzeyde yapılmaktadır. 2. seviyede değişkenler de işin içine girerek kullanılmaya başlanmaktadır. İlişkiler $ax+b=c$ şeklindeki denklemlerle ifade edilmektedir. Semboller kısıtlı bir şekilde kullanılmaktadır. 3. seviyede ilişkiler $ax+b=cx+d$ şeklindeki denklemlerle ifade edilmektedir. Semboller bağlamsal bilgiden bağımsız bir şekilde kullanılabilir (Godino vd., 2014, Godino vd., 2015).

İlköğretimde cebirsel düşünme bu şekilde incelenirken, ortaokulda ve lisede cebirsel düşünme düzeyleri daha üst düzey beceriler içermektedir. Dolayısıyla lisede cebirsel düşünmenin gelişimine üç seviye daha eklenmiştir. 4. seviye parametrelerin kullanımı ile ilgilidir. Parametrelerin fonksiyonlarda ve değişken katsayılarında kullanımı ve ifadesini içermektedir. 5. seviye bilinmeyen, değişken ve parametrelerin birlikte problem çözümü için kullanıldığı ve yapısının anlaşıldığı seviyedir. 6. seviye ise cebirsel yapılarla, tanımlarla, yapısal özellikleriyle çalışıldığı seviyedir (Godino vd., 2014, Godino vd., 2015).

Cebirsel düşünmenin epistemolojik temellerinin incelenmesinden sonra cebirsel düşünmenin bileşenlerinden bahsedilebilir.

2.5.2.Cebirsel Düşünme Becerileri

Cebir ve cebirsel düşünmeyle ilgili tanımlar incelendiğinde, cebirsel düşünmenin genelleme ve sembolize etme becerilerinden oluştuğu görülmektedir (Blanton, 2008; Kaput, 2008). Cebirsel düşünme, Carpenter ve Levi'ye (2000) göre '*cebirsel düşünme genelleme yapma, matematiksel fikirleri göstermek için ve problemleri çözmek için sembol kullanımı*' (s. 5) şeklinde tanımlanmaktadır.

Cebirsel düşünmenin aritmetiği genelleştirilmek, sayısal örüntülerdeki fonksiyonel ilişkileri tanımlamak, genellemeleri ifade etmek için modelleme yapmak, işlem ve ilişkileri soyutlamak gibi işlevleri vardır (Kaput, 2000). Aritmetiği genelleştirmek, sayılarla ilgili işlem ve özellikleri genellemektir. Aritmetikten bildiğimiz değişme özelliğinin $2+3=3+2$ ifadesi için doğruyken, $a+b=b+a$ şeklinde bütün sayılara genellenmesi gibidir. Zira genelleme, cebiri aritmetikten ayıran önemli bir özelliktir (Sfard, 1995). Sayısal örüntüleri genellemek, sayılardaki düzeni fark edip ifade etmek demektir; ardışık sayıların toplam ifadesi gibi. Cebirsel düşünme şekli olarak modelleme, matematize edilmiş olayları genellemeyi içermektedir. Cebirsel düşünme örüntüleri genelleme, ilişkileri gösterme, değişimleri analiz etme ile oldukça ilgilidir (Booker, 2009). Soyut cebir olarak bilinen soyut nesnelerden ya da sistemlerle genelleme yapmak ise ortaokul matematiğinde en az çalışılan konudur. Okul matematiğinde en sık karşılaşılan konular cebirsel düşünmenin genelleştirilmiş matematik ve fonksiyonel düşünme formudur (Blanton & Kaput, 2005; Kieran, 2004b).

Cebirsel düşünmenin temelinde olan iki fikir, girdi ve çıktı değerleri arasındaki ilişkinin incelenmesi ve bu ilişkinin bir kural halinde ifade edilmesidir (Kaput, 2008; Radford, 2008). Bunlardan ilki bizi genellemeye götürür, diğeri ise sembolize etme ile ilgilidir. Ancak cebirsel düşünme sadece sembolleri kullanma ile ilgili değildir. Bilinmeyen ve değişkenleri sembolize ederken yürütülen muhakeme ile ilgilidir (Radford, 2011). Bununla birlikte bu muhakeme sonucunda herhangi bir özel durumda genelin görülmesi de cebirsel düşünme tanımı için yeterli olmamaktadır. Bu genelleme ifadesinin cebirsel olarak ifade edilmesi gerekmektedir. Dolayısıyla muhakeme sonucunda genellemeyi ifade edebilmek için cebirsel sembolleri kullanmak, cebirsel düşünmenin özüdür (Kieran, 1989).

Hem günlük hayatta hem bilimsel anlamda genellemenin önemli olduğu kabul edilmektedir. Genelleme, gerek bireysel ve gerek sosyal olarak düşünme ve iletişim kurmanın hem amacı hem de aracıdır (Dörfler, 1991).

2.6.Genelleme

Bütün yeni kavramlar ona has özellikleri algılama ve kavrama süreçlerinde, bu özelliklerin soyutlanması ile oluşturulmaktadırlar. Kavram oluşumu, *algılama-kavrama-kavram* süreçleri ile gerçekleşmektedir. Algılama, bireyin dış dünyayı duyuşal olarak algılama şeklidir; bireyin görsel, işitsel, devinişsel olarak elde ettiği deneyimleri ile henüz

karşılaşmadığı bir şeyi görsel olarak kavramsallaştırma yeteneğidir. Kavrama basamağında genelleme ve soyutlama devreye girmektedir. Örneğin; kişi, masa kelimesini duyduğunda aklına daha önceden deneyimlediği, masa sınıfına ait tipik özellikleri olan herhangi bir masa gelmektedir. Kavrama basamağında nesnenin grup olarak benzer özellikleri üzerinde yoğunlaşıldığından, yapılan genelleme ve soyutlama kısıtlı olmaktadır. Öğrenciler tarafından oluşturulan bu kavramalar, o kavramaya ait herhangi bir elemandan genel elemanları seçecek şekilde genellenmektedir. Belirlenen bu özellikler, özel terimlerle ifade edilmektedir. Böylece yapılan genelleme, kesin ve tam bir şekilde ortaya konmakta ve dolayısıyla kavram oluşturulmaktadır. Genellenen nesneler böylece soyutlanmış olmaktadır. Dolayısıyla bu nesneler, genelden ayrılmakta ve soyutlama sürecinin ürünü olmaktadır (Davydov, 1990).

Alan yazın incelendiğinde pek çok genelleme tanımı bulunmaktadır. Bu tanımların bazılarında yola çıkılarak kapsamlı bir tanım verilecek olunursa; genelleme bir argümanı ona sebep olan durumlar arasındaki benzerliği belirleyerek bu durumların ötesine taşıyıp örüntülere, işlemlere, yapılara ve bunlar arasındaki ilişkilere genişletme sürecidir (Ellis, 2007; Harel & Tall, 1991; Kaput, 2000; Polya, 1957).

2.6.1.Genelleme Sürecinin Gelişimi

Pek çok şekilde karşılaşılabileceğimiz genelleme, matematiğin özüdür (Mason, 1996). Polya' ya (1957) göre genelleme aşamalı olarak gerçekleşmektedir. Bu süreç gözlemlenen olayı açıklama, konuyla ilişkin örnekler verme ve daha sonra özel örnekleri inceleme yoluyla gerçekleşmektedir. Ayrıca yapılan genelleme, mutlaka matematiksel bir ispatla son bulmaktadır. Radford'a göre (2003) ise genellemeler 3 aşamada oluşmaktadır. İlk aşama, yapılan genellenenin fiziksel boyutta kaldığı olgusal (*factual*) genellemedir. Bu aşamada genellikle eylemler işlemsel olarak yürütülmektedir. İkinci aşama, daha soyut olan ve yapılan genellemelerin tanımlanması için dilin kullanıldığı bağlamsal (*contextual*) genellemedir. Bağlamsal genellemede öğrenci gördüğü şekillerden yola çıkarak bir sonraki terim hakkında yorum yapmaktadır. Üçüncü aşama ise harflerin kullanımıyla cebirsel gösterimlerin yapılarak genellenenin ifade edildiği sembolik genelleme aşamasıdır.

Garcia-Cruz ve Martinón (1998) öğrencilerin genelleme seviyelerini üç aşamada incelemişlerdir. Prosedürel aktivite (*procedural activity*) aşamasında öğrenci örüntünün tekrarlı ya da yinelemeli özelliğini fark etmekte, kullanılan stratejilerle de ortak farkı

görebilmektedirler. Bu seviyedeki yapılan tek genelleme de budur. Bir genellemenin oluşturulması, uyarının özümseme düzenlenmesi anlamına gelmektedir. Böylece oluşturulan bilgi, öğrencinin yaptığı genellemedir. Bazen özümseme, yanlış şemanın içine yapılmaktadır. O zaman da yanlış bir genelleme oluşturulmaktadır. Bu aşamada işlem yapmak için özel kural oluşturulmaktadır. Eğer oluşturulan kural doğruysa, o zaman prosedürel anlama gerçekleşmiş demektir. Bir sonraki aşama olan kavramsal anlamada öğrenci benzer eylemi, benzer bir probleme uygulamakta ve genelleme ürünü olarak bir strateji geliştirmektedir. Bir önceki problemde oluşturulan kural, artık uyarın haline gelmiştir. Bu uyarın, özümseme- düzenleme süreçleri ile zihindeki uygun olan bir şemaya alınmaktadır. Böylece öğrencinin bu süreçteki bütün performansı dikkate alınarak strateji oluşturulmaktadır. Oluşan bu strateji, yeni ve benzer bir problemde kullanılmaktadır. Böylece kavramsal anlama gerçekleştirilmiş olur (Garcia-Cruz & Martinón, 1998). Bu şekilde algısal kavram oluşumuna doğru gerçekleşen yani somuttan soyuta doğru bir kavram gelişimi kavramsal genelleme olarak adlandırılmaktadır. Nesneler arasındaki ilişkilerin ve bağlantıların, zihinsel analizinin yapıldığı ve daha üst bir düşünce gerektiren bilimsel düşünce seviyesinde olan genelleme ise teorik genelleme (*theoretical*) olarak adlandırılmaktadır (Davydov, 1990).

Genelleme, en önemli cebirsel eylemlerden biridir. Vygotsky'ye göre cebiri başarabilen öğrenciler, genelleme ve soyutlama yapabilen daha üst bir düşünme seviyesine geçmişlerdir (Schmittau, 2011). Dolayısıyla cebir, öğrencilere erken yıllarda öğretilmelidir (Radford, 1996). Genelleme öğretimi bir örüntünün ya da ilişkinin analiz edildiği, elde edilen bilginin sistematik bir şekilde organize edildiği, ilişkinin sözel ve sembolik olarak ifade edilmesi şeklinde olmalıdır (Bell, 1995).

Genelleme cebirsel düşünmenin özüdür. Etkili bir cebirsel '*procept*' (Gray & Tall, 1994; s. 95) olmasının yanında hem süreci hem ürünü temsil eden *procept* kavramı, matematiksel modelleme, problem çözme ve nicel ilişkilerin sembollerle gösteriminde vazgeçilmez bir araçtır (Becker & Rivera, 2006). Genellemenin ürün ya da süreç olarak ele alındığı fark edilebilir. Ancak genelleme, her ikisini de içermektedir; genelleme sürecinin sonucunda bir genelleme ifadesi elde edilmektedir (Yerushalmy, 1993). Bu çalışmada da genelleme, hem süreç (düşünme yolları) hem ürün (anlama yolları) olarak ele alınmıştır.

2.6.2.Genellenmenin Sınıflandırılması

Stacey (1989) genellemeyi yakın genelleme ve uzak genelleme olarak ikiye ayırmıştır. Yakın genelleme, bir sonraki terimin bulunmasını gerektiren genellemedir. Uzak genelleme ise örüntünün kuralını bulmayı gerektirmektedir. Stacey (1989) çalışmasında genelleme ile ilgili 3 strateji belirlemiştir. Bu stratejiler, örüntünün bir terimine ortak fark eklenerek bir sonraki terimin bulunduğu *yinelemeli strateji*; örüntünün terimleri arasındaki ilişkiye dair matematiksel bir ifade ile belirterek *fonksiyonel ilişki arama* stratejisi ve son olarak da $f(x) = ax + b$ ($b = 0$) iken $f(x) = nx$ oranının kullanılarak aslında orantısal akıl yürütmenin kullanıldığı *bütüne genişletme stratejisi*dir.

Dörfler (1991) ise genellemeyi deneysel genelleme ve teorik genelleme olarak iki genelleme türü belirlemiştir. Deneysel genelleme, bazı objeler ya da olaylar arasında benzer özellik bulmayı ve o özellikleri benzer obje ve olayların genel özelliği olarak nitelendirmeyi gerektirmektedir. Benzeyen özellik, nesnelerin dış görünüşlerinin ve şekillerinin karşılaştırılması ile elde edilmektedir. Nesnelere ait pek çok genelleme bu şekilde oluşturulmaktadır. Örneğin; üçgen kavramı, üçgensel nesnelerin benzer ve genel özelliklerini temsil etmektedir. Bu kavram, öncelikle birey tarafından üçgen olan nesnelerle üçgen olmayan nesnelerin kıyaslanıp, üçgen olan nesnelerin benzer özelliklerinin fark edilmesi ile oluşturulmaktadır. Örneğin; üçgenlerin üç kenarlı olması gibi. Daha sonra üçgen olmanın özellikleri somutlaştırılarak zihinde oluşturulmaktadır. Böylece somutlaştırılan bu özellikler, diğer nesnelerden soyutlanarak ‘üçgen’ kavramı olarak oluşturulmaktadır. Deneysel genelleme ile yapılan genelleme, nesnelerin dış görünüşlerine bağlı olduğu için sınırlıdır. Bu noktada teorik genelleme, hem daha amaca uygun hem de daha geliştirebilirdir. Teorik genellemede ise kavramın bazı somut örnekleri üzerinden benzeyen özellikleri yoluyla genellemeden ziyade, o kavramın bütün elemanları arasındaki ilişkilerden yola çıkılarak kavramın soyutlanması söz konusudur. Bills ve Rowland (2009) da benzer şekilde nesnelerin benzer yönlerine göre yapılan genellemeyi deneysel genelleme, nesneler arasındaki ilişkilerin ve yapısal yönlerin dikkate alınarak yapılan genellemeyi ise yapısal genelleme olarak sınıflandırmışlardır.

Genellemeyi ‘bir argümanın daha genel bir içeriğe uygulanması’ olarak tanımlayan Harel ve Tall (1991) üç tip genellemeden bahsetmektedir. Geniş genelleme (*expansive generalization*) yeni bir şema oluşturmada mevcut şemanın uygulanabilirliğini genişletmektir. Yeniden yapılandırmacı genelleme (*reconstructive generalization*) mevcut şemanın uygulanabilirliğini artırmak için yeniden yapılandırıldığı genellemedir. Ayırıştırıcı

genelleme (*disjunctive generalisation*) şemanın yeni bir içeriğe dönüşürken yeni bir şema oluşturulmasıdır (Harel & Tall, 1991). Ayırıştırıcı genellenmenin başarılı bir genelleme olduğu düşünülse de genele ait özel bir örneği içermediğinden çok da başarılı olduğu söylenemez. Geniş genelleme de yapılandırmacı genellemeden daha kolaydır ancak etkili öğrenmenin gerçekleşmesinde yetersiz kalmaktadır (Zazkis & Liljedahl, 2002).

2.6.3.Genellenmenin Düşünme Yolları

Genelleme sürecinin düşünme yolları, genelleme yaparken öğrencinin zihninde olup biten bilişsel sürecin karakteristiği olarak tanımlanabilir. Alan yazında yapılan çalışmalar incelendiğinde genelleme stratejilerinin yinelemeli düşünme, belirgin düşünme, görsel düşünme, sayısal düşünme, sayısal ve görsel düşünmenin birlikte kullanıldığı pragmatik düşünme olarak kategorize edilebileceği görülebilir (Lannin, 2004, 2005; Becker & Rivera, 2005).

2.6.3.1.Yinelemeli düşünme

Örüntü genelleme problemlerinde yaygın olarak tercih edilen düşünme yolu yinelemeli düşünmedir. Öğrenciler örüntüyü fark ettiklerinde öncelikle yinelemeli düşünmeye başlamaktadırlar. Bir dizideki önceki terimle sonraki terim arasındaki matematiksel ilişkinin araştırılması yinelemeli düşünme olarak tanımlanmaktadır (Lannin, 2004). Daha genel olarak bir dizinin sıralı terimleri arasındaki ortak farkın, dizinin tüm terimleri için geçerli olup olmadığının araştırıldığı bir düşünme şeklidir. Alan yazın incelendiğinde, yinelemeli düşünme içinde incelenen stratejilerin kullanıldığı çalışmalara rastlanılmaktadır (Barbosa, 2011; Lannin, 2003; Orton & Orton, 1999; Stacey, 1989; Tanışlı & Yavuzsoy Köse, 2011; Zazkis & Liljedahl, 2002;). Sayma ve yinelemeli genelleme stratejileri, yinelemeli düşünme içinde incelenebilir. Stacey (1989) öğrencilere sorduğu bir örüntü sorusunda, öğrenciler kuralı bulurken bir şekilden sonraki şeklin bulunması olan sayma stratejisini kullanmışlar ve bunu “*her şekilde ışık sayısı 4 artmış*” olarak ifade etmişlerdir. Yine aynı çalışmada öğrenciler, başka bir soruda terimler arası farkı bulmuşlar ve bu ortak farkın, tüm terimler için ortak olmasından yola çıkarak çözüme ulaşmışlardır. Tanışlı ve Özdaş (2009) ise yaptıkları çalışmada öğrencilerin, verilen örüntüyü yakın ve uzak bir adıma devam ettirmede kullandıkları stratejileri bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme, farklılığı arama, terimler arası bağıntı arama stratejileri olarak belirlemişlerdir.

2.6.3.2. Belirgin düşünme

Yinelemeli düşünme, her ne kadar bir örüntü kuralını bulurken öncelikle kullandığımız düşünme şekli olsa da aynı işlemi devamlı yapmak yetersiz kalmaktadır. Dolayısıyla belirgin düşünmenin yinelemeli düşünmeden daha çok değer gördüğü söylenebilir. Belirgin düşünme, bağımsız değişkenin verilen değerine karşın bağımlı değişkenin değerini hesaplamayı içermektedir. Genel olarak okulda verilen cebir dersleri, formül bulmaya yönelik problemler içermektedir. Ancak öğrenciler, formül bulacak matematik bilgisine sahip olmayabilirler. Dolayısıyla bir kural bulmada belirgin ve yinelemeli düşünme iç içe geçmiş olarak devam etmektedir (Lannin, 2004, 2005). Değişkenler arasındaki ilişkinin araştırıldığı bütüne genişletme, kuralın neden öyle çalıştığı bilgisine sahip olunmadan herhangi bir kuralın tahmin edildiği tahmin ve kontrol, verilen problem durumundan çıkarılan ilişkileri temel alarak bir kuralın oluşturulduğu bağlamsal stratejiler, sabit bir değişim oranının çarpan olarak alınıp terimlere eklenip çıkarılması ile bağımlı değişkenin bulunduğu stratejiler belirgin düşünme içinde incelenmektedir (Barbosa, 2011; Lannin, 2003, 2005). Tanışlı ve Özdaş (2009) da yaptıkları çalışmada örüntüyü yakın adıma devam ettiren öğrencilerin belirgin stratejiler adı altında şeklin yapısına bağlı fonksiyonel bir ilişki kullanma, fonksiyonel bir ilişki kullanma; sonlu adıma devam ettiren öğrencilerin ise modelleme yapma ve fonksiyonel bir ilişki kullanma stratejilerini kullandıklarını belirlemişlerdir.

2.6.3.3. Görsel düşünme

Görsel düşünme, *şekilleri görmese bile diziye tamamlayacak şekilde kelimelerle ifade etme* olarak tanımlanmaktadır. Görsel düşünme, genelde geometrik olarak verilen artan örüntülerle işlem yaparken kullanılmaktadır (Friel, Rachlin & Doyle'den aktaran Friel, Markworth, 2009). Görsel olarak düşünen öğrenciler, şeklin yapısal özelliğine odaklanmaktadırlar. Presmeg'in de (1986) ifade ettiği gibi bu öğrenciler, çözümlerinde görsel imgeler kullanmaktadırlar (Becker & Rivera 2005, 2006; Presmeg'den aktaran Garcia-Cruz & Martinon, 1997). Şeklin yapısal özelliğinin dikkate alınmasını gerektiren tarz sorularda, odak çabucak 'kaç tane' sorusuna kayabilir.

Friel ve Markworth (2009) çalışmalarında öğrencilere, aşağıdaki gibi bir örüntü vermişler ve bu örüntünün yakın ve uzak adımını sormuşlardır. Örneğin; 43. adımdaki gülün yüz sayısı istendiğinde, öğrenciler her üç kolda 43 gülün yüz olduğunu ve kolların birleşimi

olan yerde fazladan bir gülen yüz daha olduğunu ifade etmişlerdir. Bu çalışmada olduğu gibi görsel olarak düşünen öğrenciler, verilen şekillerdeki sabit ilişkiden yola çıkarak şekil ile adım sayısı arasındaki ilişkiyi açıklamaya çalışmışlardır (Becker & Rivera, 2006).



Şekil 3. Friel ve Markworth' un (2009) çalışmalarında öğrencilere sordukları soru

Genelleme yaparken görsel olarak düşünen öğrencilere göre değişkenler, bir örüntüyü oluşturan terimlerin sırasını ifade etmektedirler (Becker & Rivera, 2005). Rivera ve Becker (2007) görsel düşünme başlığı altında yapılan genelleme stratejilerini, yapıcı genelleme ve yapıyı çözücü genelleme olarak ikiye ayırmışlardır. Yapıcı genelleme, kapalı formülü $y=mx+b$ şeklinde olan, şeklin kenarında ya da köşesinde olanları dikkate almak için çaba harcamaya gerek kalmadan şeklin özelliğinden kolayca çıkarılabilen genellemedir. Yapıyı çözücü genelleme ise daha karmaşık olup geçerliliğini sağlamak için şekilsel ipuçlarının örtüşen özelliklerini tanımayı gerektirmektedir. Yapıcı genellemede kural, verilen şekli oluşturan bileşenlerden kolayca elde edilmektedir. Yapıyı çözücü genellemede ise şekli oluşturan ve örtüşen parçaların belirlenmesi, kural bulunurken her bileşenin sayılıp, örtüşenlerin çıkarılması söz konusudur. Chua ve Hoyles (2009) bu sınıflandırmaya bir kategori daha eklemişler ve bunu “yeniden oluşturma stratejisi (*reconstructive*)” olarak belirlemişlerdir. Bu stratejide öğrencilerin genelleme yaparken verilen şeklin daha iyi bilinen bileşenlerine ayrıldığı ve bu bileşenlerine ayrılarak yeni oluşan şekilden bir kuralı elde ettiklerini belirlemişlerdir.

2.6.3.4.Sayısal düşünme

Becker ve Rivera (2006) genelleme sürecinde sayısal yaklaşımı tercih edenlerin kural bulurken sayısal işlemleri kullandıklarını belirtmişlerdir. Sayısal yaklaşım, verilen şekil örüntüsünün sayı örüntüsüne dönüştürülerek bu sayı örüntüsünün kural belirlemede kullanılması olarak tanımlanabilir (Becker & Rivera, 2005; Tanışlı & Yavuzsoy Köse,

2011). Bezuska ve Kenney (2008) sayı örüntülerinin çözümlerini bulmada üç strateji belirlemişlerdir. Bunlar, i) verilen bir sayı dizisindeki terimlerin, kuralı bilinen başka bir diziyle benzer terimlerinin karşılaştırılması; ii) sayı dizisindeki her terimin kendinden önce gelen terimin yerine konması; iii) farklar metodu yardımıyla bir formül bulma şeklindedir (Bezuska & Kenney'den aktaran Chua & Hoyles, 2011).

2.6.3.5. Pragmatik düşünme

Pragmatik düşünme görsel ve sayısal düşünmenin birlikte kullanılmasıdır; sayısal ve görsel yaklaşımın 'hibritlenmiş' halidir (Kirwan, 2015, s. 29). Pragmatik olarak düşünen öğrenciler hem görsel hem sayısal düşünebilen öğrencilerdir (Becker & Rivera 2006; Tanışlı & Özdaş, 2009). Dolayısıyla verilen bir örüntünün kuralını bulurken hem görsel stratejilerden hem de sayısal stratejilerden yararlanmaktadırlar.

İlgili alan yazın incelendiğinde, öğrencilerin genelleme yaparken örneğin; sayarak örüntü adımını bulma, örüntüyü yakın adıma devam ettirme, fonksiyonel bir ilişki kullanma gibi eylemleri, öğrencilerin genelleme yaparken kullandıkları stratejiler olarak ele alınmaktadır. Bu stratejileri, bu çalışmanın doğasına uygun hale getirme gereğinden dolayı genelleme eyleminin düşünme yolları olarak sınıflama ihtiyacı doğmuştur. Dolayısıyla alan yazında ortaya konan genelleme stratejileri yinelemeli düşünme, belirgin düşünme, görsel düşünme, sayısal düşünme ve pragmatik düşünme altında ele alınmıştır. Aslında strateji dediğimiz şey de zihinsel eylemlerimizin bilişsel özelliğidir. Ellis (2004) çalışmasında genellemeyi, süreç (genelleme eylemleri) ve ürün (yansıma genellemeleri) olarak ele almış ve genelleme taksonomisini ortaya koymuştur. Genelleme taksonomisi oluşturulurken, Lobato'nun (2003) öğrenen odaklı transfer (*actor-oriented transfer*) yaklaşımı temele alınmıştır. Lobato (2003) öğrencinin karşılaştığı problemler arasında kurduğu kendi benzerliklerini oluşturma sürecini, öğrenen perspektifinden incelemiştir. Böylece alan yazında geçen transfer çalışmalarını, araştırmacı perspektifinden öğrenen perspektifine yükselterek, transfer çalışmalarına yeni bir boyut eklemiştir. Öğrenen odaklı transfer, bireyin karşılaştığı yeni durumu, daha önceden zihninde olan hangi yapılarıyla nasıl ilişkilendirdiğine dair önemli ipuçları vermektedir (Lobato, 2003). Alan yazın incelendiğinde, genelleme süreci ile transfer sürecinin birbirine benzediği görülebilir. Genelleme tanımları incelendiğinde öne çıkan özellikler olan kişinin muhakemesini genişletmesi ve kural geliştirmesi süreçleri ile öğrenen odaklı transferde genellenmenin ve öğrenmenin oluşma süreçleri birbirine benzemektedir. Ayrıca genellemede yapılan

durumlar arasındaki benzerliği ifade etme ile öğrenen odaklı transferde kişinin öğrenmeyi gerçekleştirirken mevcut olan hangi bilgisiyle benzerlik ilişkisi kurduğunun araştırılması, birbirine benzeyen eylemlerdir (Ellis, 2007). Bununla birlikte yukarıda açıklanan genelleme stratejileri daha çok araştırmacı odaklı transfer yaklaşımı ile açıklanabilir. Çünkü bahsi geçen bu stratejiler ile öğrencinin daha önce karşılaştığı hangi durumla, problemle benzerlik ilişkisi kurduğu bilgisi elde edilemez. Örneğin; Stacey (1989) öğrencilere sorduğu bir örüntü sorusunda öğrenciler kuralı bulurken bir şekilden sonraki şeklin bulunması olan sayma stratejisini kullanmışlar ve bunu “*her şekilde ışık sayısı 4 artmış*” olarak ifade etmişlerdir. Ancak sayma stratejisi, öğrencinin zihnindeki hangi bilgisiyle benzerlik kurduğu hakkında bilgi vermemektedir. Öğrenen odaklı transfer yaklaşımını bu şekilde açıkladıktan sonra, bu yaklaşım temele alınarak geliştirilen genelleme taksonomisi, süreç olarak genelleme eylemleri ve ürün olarak yansıma genellemeleri ile ilgili açıklamalara geçilebilir.

2.6.4.Düşünme Yolları Olarak ‘Genelleme Eylemleri’

Genelleme yaparken öğrencinin zihninde olup bitenler, gerçekleşen bilişsel sürecin karakteristiğidir. Ellis (2004) bu süreci, kişinin sözel ya da yazılı eylemi boyunca zihninde gerçekleşen genelleme sürecinin karakteristiği olarak ifade etmiş ve bunu ‘genelleme eylemleri’ olarak sınıflandırmıştır. Örneğin; öğrenci bir örüntünün kuralını bulurken daha önceden gördüğü bir örüntüyle “ilişkilendirerek” problemi çözebilir ya da “benzer örüntü araştırarak” problemi çözebilir. Bunlar, öğrencinin zihninde gerçekleşen süreçlerdir ve bu süreçlerin sonucunda ortaya genelleme ifadesi konmaktadır. Ellis (2004) genelleme eylemlerini ilişkilendirme, araştırma, genişletme şeklinde üç kategoriye ayırmıştır. Bu kategoriler birbirlerinden kesin çizgilerle ayrılmazlar ve hepsi genelleme eyleminin bir parçasıdır. Bu sınıflandırmanın belirlenmesinde, öğrencinin odağının ne olduğu dikkate alınmıştır.

2.6.4.1.İlişkilendirme

Öğrenci, iki ya da daha fazla olayı, durumu, problemi ilişkilendirir ya da arada bağlantı kurarsa, ilişkilendirme gerçekleşmiş olur. İlişkilendirme kategorisinde yapılan eylemler, amaçlı olmaktan ziyade rastgeledir. Öğrenci bir ilişki ararken, o ilişkinin nasıl kurulduğunu

da bilmemektedir. İlişkilendirme iki şekilde gerçekleşmektedir; ya durumları ya da nesneleri ilişkilendirme.

Durumları ilişkilendirme

Yapılan ilişkilendirme iki ya da daha fazla problem ya da durum arasında gerçekleşmektedir. Burada durum olarak belirlenen, öğrenci tarafından durum olarak görülen herhangi bir şeydir. Öğrenci karşılaştığı durumu daha önce gördüğü bir problemle, örnekle, durumla ilişkilendirerek *geriyle ilişkilendirme* yapıyor olabilir. Öğrenci karşılaştığı durumun benzerliğinden yola çıkarak başka bir durum oluşturup onunla da ilişkilendirme yapıyor olabilir. Bu da *yeni bir durumla ilişkilendirme* olarak adlandırılmaktadır.

Nesneleri ilişkilendirme

Öğrenci, matematiksel nesneler arasında da ilişkilendirme yapıyor olabilir. Öğrenci, iki ya da daha fazla denklem, grafik, tablo, problem ya da başka nesnelerin benzerliğinden yola çıkarak ilişkilendirme yapabilir. İlişkilendirme, matematiksel nesnelerin görsel olarak ya da şekilsel olarak birbirine benzetilmesiyle de yapılıyor olabilir. Bunlardan ilki *özelliği ilişkilendirme*, ikincisi *biçimi ilişkilendirme* kategorisinde değerlendirilmektedir.

2.6.4.2.Araştırma

Öğrenci, benzerlik bulmak amacıyla işlemleri tekrar tekrar uygulayabilir. Burada gerçekleştirilen eylemler daha amaçlıdır. Öğrenci, bir benzerlik ilişkisi bulunduğunun farkında olarak, birçok örnek arasında benzerlik aramaktadır. Ellis (2004) tarafından verilen “saniyelere göre belirli bir yere uzaklığı verilen bir kişinin sabit hızla yürüyüp yürümediği” sorusunun sorulduğunu düşünelim. Bu durumda öğrenci, verilen her bir uzaklıkla ona karşılık gelen zamanın oranını alıp sabit kalıp kalmamasından yola çıkarak *benzer ilişki araştırıyor* olabilir. Bir başka öğrenci de yine aynı soruda uzaklık ve zamanın oranını bulup bunun hızla bağlantısını kuramaz ama benzer prosedürü mesela oran almayı tekrar tekrar uygulayabilir. Böylece öğrenci *benzer prosedür araştırıyor* olabilir. Benzer prosedür ve benzer ilişkinin araştırılması birbirine benzemekle birlikte, gerçekleştirilen eylemin hangi kategoride nitelendirebileceği araştırmacıya bırakılmıştır. Öğrenci, örneğin verilen bir örüntü sorusunda örüntünün sabit kalıp kalmadığını araştırabilir. Bununla birlikte düşünmesini verilen durumun ötesine geçiremez. Böylece *benzer örüntü*

araştırıyor olabilir. Bu üç kategorinin hepsinde öğrenci yapılan işlemler üzerinde yoğunlaşmaktadır. Ancak bazen öğrencinin odağı yaptığı işlemlerin sonucu olur, benzer sonucu tekrar tekrar elde etmek için işlem yapar. Böyle bir durumda öğrenci, *benzer çözüm araştırma* eylemi gerçekleştirmektedir.

2.6.4.3. Genişletme

Öğrenci, bir benzerlik ilişkisinin varlığını fark etmekle kalmayıp aynı zamanda bu ilişkiyi verilen durumun ötesinde daha genel bir yapıda ifade ederse, genişletme yapıyor olabilir. Yapılan genişletme sonucunda yeni bir ilişki, yapı, tanım gibi ürünlere ulaşılmaktadır. Öğrenci, verilen ilişkiyi, ona sebep olan olayın ötesinde daha geniş durumlara uygularsa, *uygulanabilirlik alanını genişletiyor* olabilir. Öğrenci, bazen de yaptığı genellemeden daha global bir durum oluşturmak için bağlamsal *ayrıntıları uzaklaştırarak genişletiyor* olabilir. Burada amaç bir sınıftaki her obje için doğru olabilecek genel bir fenomen tanımlamaktır. Öğrenci, bir ilişki üzerinde işlem yaparak ilişkiyi bir fenomenin yeni örneklerine genişletebilir. Böylece *işlem ile genişletme* yapmış olur. Öğrenci, bir örüntüyü tekrar tekrar uygularsa *örüntüyü ya da fikri devam ettirerek genişletme* yapmış olur. Burada esas olan, sabit bir örüntüye odaklanarak bu örüntüyü değiştirmeden devam ettirmektir. Burada öğrencinin odağı, örüntüye neden olan ilişki üzerindedir.

2.6.5. Anlama Yolları Olarak ‘Yansıma Genellemeleri’

Genelleme eyleminin anlama yolu, genelleme sürecinin sonucunda ortaya çıkan ürünü yani genelleme ifadesini belirtmektedir. Genelleme süreci sonucunda öğrenciler tarafından oluşturulan ifadeler, yansıma genellemeleri olarak sınıflandırılmıştır. Yansıma genellemeleri, genelleme eylemleri sonucunda öğrencinin ortaya koyduğu sözel ya da yazılı genelleme ifadelerinden oluşmaktadır. Genelleme süreci sonucunda öğrenci bir örüntü, bir kural ya da bir tanım ortaya koyabilir.

2.6.5.1. Açıklama ya da İfade Etme

Öğrenci, bir genellemeyi genel bir örüntü, özellik, kural ya da strateji şeklinde ortaya koyabilir. Yapılan genelleme, bir tanım ya da matematiksel bir ifade ile belirlenmektedir. Eğer yapılan genellemede kullanılan ifadeler, devam eden dinamik bir ilişkiyi gösteriyorsa,

o zaman *devam eden bir fenomeni açıklama* şeklinde bir genelleme yapılyordur. Örneğin; matematikte sıkça kullanılan “her a için, b ... değerini alır” ifadesi bu tarz bir genellemedir. Öğrenci, problemleri ya da olayları ilişkilendirerek özelliklerini analiz eden *benzer* ifadeler oluşturabilir. Burada öğrenci, olayların ya da problemlerin benzer özellikleri üzerine odaklanmaktadır. Örneğin; bir tablodaki örüntüyü araştırırken, x ve y değerleri arasındaki oranı alıp ‘ x değerleri y ’nin 3’de 1’i’ ifadesi bir benzerlik ifadesidir. İlişki kurulan benzerlik bazen *ortak özellik, objeler ya da gösterimler, olaylar* arasında olabilir.

Öğrenciler, yaptıkları genellemeleri bazen genel kurallar, örüntüler, stratejiler şeklinde genel prensipler olarak ifade etmektedirler. Bu ifadeler, cebirsel gösterimlere uygun olduklarından, öğrencilerden beklenen ürünlerdir. Yapılan bu genellemeler, matematik araştırmacıları için de geçerli genellemelerdir. Bu ifadeler *genel kural ifadesi, genel örüntü ifadesi, genel strateji ifadesi, global kural ifadesi* şeklinde olabilir.

2.6.5.2.Tanımlar

Öğrenciler, bazı durumlarda genellemelerinin sonucunda oluşan ifadelerini, örüntünün, ilişkinin, sınıfın temel özelliği olarak ifade eden cümleler kurmaktadır. Bu şekilde tanımlanan fenomenin kapsamı genişletilebilir. Bir özelliği ya da ilişkiyi genişleten öğrenci, özelliğin ya da ilişkinin uygulandığı bir durumlar sınıfı tanımlayabilir. Oluşturulan sınıf matematiksel olarak bütün sınıfı yansıtmayabilir, öğrencinin gözünden özelliğin uygulandığı sınıf olması yeterlidir. Özel bir sınıfa ait olan nesnenin özelliklerini tanımlayan ifadeler, o sınıfın tanımını belirtmektedirler.

2.6.5.3.Etki

Önceden yapılan bir genellemenin yeni bir probleme uygulanmasıdır. Öğrenci genellemeyi oluşturmakla kalmayıp aynı zamanda bunu kullanabilmelidir. Eğer daha önceden geliştirilen fikirler üzerine yenileri eklenirse, bu durum *önceki fikirlerin ya da stratejilerin etkisi* olarak adlandırılmaktadır. Ancak bunun belirlenmesi, öğrencinin geçmişi ve sahip olduğu bilgiler bilinmediği sürece zordur. Daha önce oluşturulan bir bilgi, yeni durumu açıklamak için değiştirilebilir. Bu durumda elde edilen bilgi *değiştirilmiş fikir ya da strateji* şeklinde ifade edilmektedir.

2.7.DNR Tabanlı Öğretim

Matematik eğitimcilerinin üzerinde çalıştığı konular genellikle hangi matematiksel bilginin nasıl öğretileceği üzerinedir. Harel, bu sorulardan yola çıkarak DNR tabanlı öğretim (kısaca DNR) modelini önermiştir. DNR, kavram ve iddialarının temelindeki felsefeyi ortaya koyan öncüllerden, bu öncüllerden doğan ve tanımlanan kavramlardan, DNR öncüllerinden çıkan ve kavramları bağlamında oluşan iddialardan meydana gelen ve deneysel çalışmalarla da desteklenen teorik bir çerçeve olarak düşünülebilir (Harel, 2008b). DNR, matematiği öğrenmek için öğrencinin öncelikle zihinsel ihtiyaç duyması gerektiğini, onların matematik fikirleri ve pratikleri kazanmaları gerektiğini ve öğrendikleri matematiği içselleştirmeleri, organize edip yeniden düzenlemeleri gerektiğini savunan bir yaklaşımdır (Harel, 2008c).

DNR, aslında bilinen öğretim kuramlarını temele alarak matematiksel bilginin yapısını açıklamaya çalışmakta, matematik öğretime ve öğrenimine ilişkin birtakım iddialar ortaya atmaktadır. İncelendiğinde DNR tabanlı öğretimin, bilişsel ve sosyal yapılandırmacılığın fikirlerini esas aldığı görülmektedir. Yapılandırmacılık, öğrenmenin nasıl gerçekleştiğini açıklayan felsefi bir yaklaşımdır. Dolayısıyla DNR, bireylerin nasıl matematik öğrendiklerini açıklayan ve daha etkili matematik öğretimi için yollar sunan bir çerçeve olarak düşünülebilir. Yapılandırmacılık matematiğin nasıl öğretilmesi gerektiğini söylemez ve dolayısıyla uygun bir model önermez (Simon, 1995). Yapılandırmacılığın, eğitim durumlarının nasıl düzenlenmesi gerektiği ile ilgili ve öğretim ortamının nasıl olması gerektiği ile ilgili tavsiyeleri olabilir. DNR tabanlı öğretim de bilişsel ve sosyal yapılandırmacılığın eğitim durumları ve öğretim ortamının bu tavsiyelerini temele alarak oluşturulan, kendi dinamikleri olan bir yaklaşım olarak düşünülebilir.

2.7.1.DNR'nin Felsefesi

DNR, kavram ve iddialarının temelinde bulunan sekiz öncülden oluşmaktadır. Bu öncüller, DNR'nin matematik, matematik öğretimi ve öğrenimine ilişkin ortaya koyduğu teorik çerçevenin felsefesini oluşturmaktadır. Bu öncüllerin büyük kısmı Piaget'nin bilişsel gelişim kuramıyla ve Vygotsky'nin sosyal gelişim kuramı ile açıklanmaktadır. Bu öncüller; matematiği, matematik öğretimini ve öğrenimini açıklayan üç başlık altında incelenebilir.

1. Matematik: Plato'ya göre matematik, fiziksel dünyaya uygulanabilen değişmeyen objeleri anlama şeklidir. Matematik, sayılarla ve üçgenler, küreler gibi şekillerle çalışarak bilgi elde etmektedir. Şu halde pür matematikle ilgili bu bilgileri duyularımızla elde edemeyeceğimize göre, hangi zihinsel süreçlerle bu bilgileri elde ederiz? Bu soruya en iyi cevabı, Aristotile vermektedir. Aristotile, bilme ile ilgili olarak kişinin bir bilgiye sahip olması için onun öyle olduğunu bilmesinin yanında, onun neden öyle olduğunu bilmesi gerektiğini söylemektedir. Örneğin; geometri ile uğraşan biri üçgenin iç açıları toplamının, iki dik açığa eşit olduğunu bilmekle kalmaz, bunun neden böyle olduğunu da bilir. Bu bilginin neden böyle olduğunun bilinmesinde ispat, soyutlama süreçleri işe koşulmaktadır (Lear, 1988).

Matematiğin ne olduğu matematikle uğraşmayan birine sorulursa, şüphesiz problemlerden ve anlaşılamaz çözümlerden bahsederken, bir öğrenci de matematiğin aksiyomlar, tanımlar, teoremler, ispatlardan oluşan bir disiplin olduğunu ifade edebilir. Oysa matematik, bunlardan çok daha fazlasıdır. Matematik, birbirini tamamlayan iki kümenin birleşimi olarak ele alınabilir. Bunlardan ilki, aksiyomlardan, tanımlardan, teoremlerden, problemlerden ve çözümlerinden oluşan yapılar kümesidir. Bu küme, matematik tarihi boyunca ortaya konmuş istendik anlama yollarını içermektedir. İkinci küme ise ilk kümeyi oluşturan ürünlere ait zihinsel eylemlerin özelliklerini içeren düşünme yollarından oluşmaktadır (Harel, 2008a). Matematik bilgisi, anlama ve düşünme yollarından oluştuğuna göre matematik öğretiminde düşünme ve anlama yollarının ikisinin de gelişimi amaçlanmalıdır.

2. Öğrenme: DNR, bilginin ne olduğu ve öğrenmenin nasıl gerçekleştiği konusunda Piaget'nin bilişsel gelişim kuramını temele almaktadır. Dolayısıyla bu kuramın öğrenme ile ilgili fikirlerini hatırlamak yerinde olacaktır.

Yapılandırmacılığa göre matematiksel olan ya da olmayan bilgi, bireyin kendi zihninde ve bireye özgü olarak oluşturulmaktadır. Birey, çevresiyle de etkileşimi sonucu oluşturduğu bilişsel yapılarını ve deneyimlerini sonraki öğrenmeleriyle ilişkilendirerek zihinsel gelişimini devam ettirmektedir (Kilpatrick, 1987; Lerman, 1989; von Glasersfeld, 1984, 1987). Araştırmalar göstermektedir ki öğrenciler, yeni oluşturacakları matematiksel bilgilerini, daha önceden bildikleri bilgilerin üzerine, o bilgilerle ilişkilendirerek oluşturmaktadırlar (Resnick, 1986).

Bireyin zihninde bilişsel yapılar bulunmaktadır. Yeni bir bilgiyle karşılaştığında, birey bu bilgiyi, zihninde var olan bilişsel yapıların içine almaya çalışmaktadır. Bireyin zihnindeki

bilişsel yapının çevresine uyumunu sağlayan bu süreç özümleme olarak adlandırılmaktadır. Ancak karşılaşılan yeni bilgi/olay, var olan bilişsel yapıya uymayabilir. Bu durumda kişinin zihnindeki bilişsel yapıyı, yeni durumu açıklayabilmek için yeniden şekillendirmesi gerekmektedir. Bu süreç de düzenleme süreci olarak adlandırılmaktadır. Bireyin zihninde bulunan şemalar yeni durumu açıklamak için yeterliyse, özümleme gerçekleşmektedir. Eğer yeterli olmazsa, o zaman da şemaların yeniden düzenlenmesi süreci ile öğrenme gerçekleşmektedir (Bacanlı, 2009; Senemoğlu, 2005). Öğrenmenin gerçekleşmesinde önemli bir faktör, dengeleme sürecidir. Bu süreç, bireyin zihninde meydana gelen özümleme ve düzenleme yoluyla çevresine uyum sağlayarak dinamik bir dengeye oluşması sürecidir (Senemoğlu, 2005; s. 38). Birey, yeni bir durumla karşılaştığında zihnindeki şemalar yetersiz kalırsa, denge durumu bozulmakta ve zihinde dengesizlik meydana gelmektedir. Yeni durumu açıklamak için düzenleme sürecinin sonucunda daha üst düzeyde bir denge durumu oluşturulmaktadır. Böylece öğrenme meydana gelmektedir. Bu süreç, durağan bir süreç değildir. Yeni bilginin, var olan bilişsel yapıların içine alınması gerçekleştirildiğinden, dinamik bir süreçtir (Panasuk & Lewis, 2012; Piaget, 1964). Bilişsel gelişim dünyayı öğrenme yolunda bir denge, dengesizlik, yeni bir denge sürecidir (Piaget, 1964).

Bütün insanlar, öğrenmek için istek duyma ve zihinsel eylemleri yürütme kapasitesindedirler (Harel, 2008b). Öncüllerden biri olan “epistemophilia”, “episteme” sevgisi olarak geçmektedir. ‘Episteme’, genellikle “bilmek” ya da “bilimsel bilgiye sahip olmak” anlamına gelmektedir. Aristotle’a göre “episteme”, geometri gibi düzenlenmiş bilgi birikimini ve kişinin bu bilgiye ulaşmak için ortaya koyduğu isteği ifade etmektedir. Çocuğun dünya hakkındaki ilk deneyimleri içsel dürtüleriyle oluşmaktadır. Bu durum sonraki yıllarda da devam etmektedir. Bilgiyi edinmek ya da anlamak için içsel bir merak ve istek, onu yönlendirmektedir. Bilgiye ulaşmak için en az bunlar kadar önemli olan bir başka nokta ise insanların bilgiyi edinirken, zihinlerinin karışma kapasiteleridir (Lear, 1988).

3. *Öğretme*: DNR’ ye göre istendik öğrenmenin gerçekleşmesi için öğretim mutlaka bir uzman, bir öğretmen kontrolünde olmalıdır. Bu öncül bize Vygotsky’nin sosyal yapılandırmacılığını çağrıştırmaktadır.

Vygotsky’e (1980) göre matematik bilgisi, deneyimler ve kültür yoluyla elde edilmektedir. Elde edilen tüm bilgiler ise matematik disipliniyi oluşturmaktadır. Öğrenci, öğrendiği tüm matematiksel bilgilerini kendi deneyimleriyle elde etmektedir. Öğretmenin görevi ise

öğrencinin kendi deneyimleriyle kazandığı bu bilgilerin, daha bilimsel olması için ve öğrencide kavramsal anlamının gerçekleşmesi için onları yönlendirmektir. Vygotsky' nin kuramına göre birey, o konuda uzman birinden daha iyi öğrenmektedir. Diğer bir deyişle bireyin kendi başına öğrendiği bilgilerle bir uzman eşliğinde edindiği bilgiler arasında bir fark bulunmaktadır. Bu farka yakınsak gelişim alanı adını vermiştir. Öğrencinin istendik bilgiye sahip olması için ve daha yüksek bir düşünme seviyesine geçmesi için, o konuda bilgili bir uzmanın yönlendirmesine ihtiyaç duymaktadır. Bu yönlendirme, uzman ile olan sosyal etkileşim yoluyla gerçekleşmektedir. Vygotsky' e göre öğretmenler, rutin olmayan problemlerle öğrencinin zihninde çelişki oluşturmalıdır. Daha sonra bu problemin çözümüyle, öğrencinin zihninde daha üst düzey öğrenme ve düşünme gerçekleşecektir. Etkili öğrenme, yakınsak gelişim alanında gerçekleşmektedir. Buna göre öğrenme, çocuğun çevresindeki insanlarla ve akranlarıyla etkileşimi sırasında gerçekleşen gelişimsel bir süreçtir (Vygotsky, 1980, s.90).

Matematik eğitiminde, son yıllarda önemli olan iki eğilim vardır. Birincisi öğrencilerin bilgilerini kişisel deneyimleriyle aktif bir şekilde oluşturmalarıdır. Diğer bir eğilim ise matematiksel bilginin sosyal ve kültürel olarak oluşturulan yapısıdır. Her ne kadar bu iki eğilim birbirinin tersi olarak düşünülse de, aslında bu ikisi birbirini tamamlamaktadır (Cobb, 1994). Piaget' nin bilginin elde edilmesi ile ilgili görüşlerinin, Vygotsky 'den farklı olduğu düşünülebilir. Zira Piaget' ye göre kişi bilgisini kendi eylemleri sonucu elde etmektedir. Vygotsky'ye (1980) göre ise çocuğun kültürel gelişimi, öncelikle insanlar arasında etkileşim yoluyla olan sosyal seviyede, sonrasında ise bireyin kendi içinde olan bireysel seviyede gerçekleşmektedir. Daha üst seviyedeki fonksiyonlar, insanlar arasındaki ilişkiyle gerçekleşmektedir (Vygotsky, 1980, s. 57).

2.7.2.DNR' nin Temel Öğretim İlkeleri

DNR' nin matematik öğretimine ilişkin ilkeleri üç kısımda incelenebilir. Bunlar; etkileşim, gereklilik, muhakemedir. Etkileşim, matematiksel bilginin gelişiminin, karşılıklı olarak anlama ve düşünme yollarının birbirini etkilemesi sonucu oluşması; gereklilik, anlama ve düşünme yollarının geliştirilmesinde, öğrencinin zihinsel ihtiyacına cevap verilmesi; muhakeme ise geliştirilen anlama ve düşünme yollarının içselleştirilmesi ve organize edilmesi süreci olarak ifade edilmektedir.

2.7.2.1.Etkileşim

Araştırmacılar, bir taraftan matematiksel kavramları bilme ve anlama üzerinde çalışırken diğer taraftan matematiksel işlemler bilgisine ve anlama üzerine çalışmaktadırlar (Nesher, 1986). Hiebert ve Lefevre'ye (1986) göre kavramsal bilgi, birbiriyle bağlantısı olan bilgi ağı olarak düşünülebilir. Zihindeki birçok bilgiyle ilişkilendirilmiş olan kavramsal bilgi, bilgiyi oluşturan parçaların arasında ilişki kurulması ile oluşturulmaktadır. Bu ilişkilendirme süreci, yeni öğrenilen bilgi ile daha önceden öğrenilmiş bilgi arasında gerçekleşmektedir. Yeni bilgi, uygun olan bir şemanın içine asimile edildiğinden, yeni bilgi mevcut bilgiyle bütünleşmektedir. İşlemsel bilgi ise matematik sorularını çözmekte kullanılan kurallardan, algoritmalarından, işlemlerden ve matematiği oluşturan sembollerden oluşmaktadır. İşlemsel bilgi, problemleri çözmek için gerekli olan stratejileri de içermektedir. İki tür bilgi de farklı işlevlere sahiptir ve biri eksik olduğunda diğeri anlamsız olur. Matematiksel bilginin oluşturulması için bu iki bilginin birbirini tamamlayacak şekilde verilmesi gerekmektedir.

Kavramsal ve işlemsel bilginin nasıl oluştuğuna ilişkin çeşitli görüşler vardır: Kavramsal bilginin önce oluştuğu, daha sonra işlemsel bilginin kavramsal bilgiden elde edildiği; işlemsel bilginin önce oluştuğu, daha sonra kavramsal bilginin işlemsel bilgiden elde edildiği; işlemsel ve kavramsal bilginin birbirine bağlı olarak oluştuğu gibi görüşlerdir. En çok kabul gören görüş ise işlemsel bilgideki artışın kavramsal bilgideki artışa sebep olduğu ve kavramsal bilgideki artışın işlemsel bilgideki artışa sebep olduğu yönündedir (Rittle-Johnson & Schneider, 2014). DNR de benzer şekilde düşünme yollarının anlama yollarını etkilediğini ve anlama yollarının da düşünme yollarını etkilediğini ifade etmektedir.

DNR' de kavramsal ve işlemsel bilgi, düşünme yolları ve anlama yolları olarak ifade edilmektedir. Anlama yolları, tanımlar, teoremler, ispatlar, problemler ve çözümler gibi ürünleri işaret ederken; düşünme yolları, bu ürünleri oluşturmak için gerçekleştirilen sürecin özelliklerini işaret etmektedir. Matematik, bu iki bilgi türünün tamamından oluşmaktadır. Anlama yolları düşünme yollarından, düşünme yolları da anlama yollarından etkilenmektedir. DNR' ye göre etkileşim, anlama yollarının üretilmesi ile düşünme yollarının gelişmesi ve tersi olarak üretilen anlama yollarının, düşünme yollarından etkilenmesi demektir (Harel, 2013). Bu bilgilerden birinde meydana gelen değişimin diğerini etkilediği, diğer çalışmalarla da desteklenmektedir (Rittle-Johnson & Schneider, 2014; Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001).

2.7.2.2.Gereklilik

Harel' a (1998, 2008b) göre öğrenciler öğrenecekleri şeye karşı zihinsel ihtiyaç duyarlarsa, öğrenmeye daha yatkın olmaktadırlar. Zihinsel ihtiyaç, öğrencinin herhangi bir matematiksel kavramı öğrenmeye karşı istek duyması demektir. Peki, bu neden gereklidir? DNR' ye göre öğrenmenin oluşabilmesi için zihinde dengesizlik meydana gelmelidir. Bu sayede öğrenci, var olan yapısının ötesine geçerek yeni bir yapı oluşturabilir (Piaget, 1978). Zihinde dengesizliğin meydana gelebilmesi için zihinsel karışıklık yaratmak gerekmektedir. Öğrenci, var olan bilgisiyle çözemeyeceği bir problem durumu ile karşılaştığında o problemi çözmek için istek duyacak ve zihninde olan bilgide değişiklik yapıp yeni bir bilgi oluşturacaktır. DNR' ye göre zihinsel karışıklık bireyin zihinsel ihtiyacı ve psikolojik ihtiyaçlarının karşılanması ile oluşmaktadır. Birey, bir problem durumu ile karşılaştığında var olan bilgisini kullanarak yeni bir bilgi elde ederse, zihinsel ihtiyacını gidermiş olmaktadır. Öte yandan kişi, bir problem durumu ile karşılaştığında, o problem kişi için ilgi çekici olmalıdır, kişi problemi çözmek için istek duymalı ve sebat etmelidir. İşte bunlar da psikolojik ihtiyaç boyutunu oluşturmaktadır (Harel, 2008b).

Öğrencilere sunulan problemler, onların ilgisini çekecek şekilde düzenlenmeli ve zihinlerinde karışıklık meydana getirmelidir. Örneğin; çarpanlara ayırma konusunda genel eğilim, çarpan ağacı oluşturarak konuyu öğretmek şeklindedir (Lim, 2009). Çarpan ağacı yoluyla herhangi bir sayı çarpanlarına ayrıldıktan sonra, öğrencilere aynı metodun başka sayılara uygulanmasını içeren sorular sorulması, genel eğilimdir. Yani öğrenciler, öğrendikleri kuralı defalarca farklı problemlerde uygulayarak o konuyu öğrenmektedirler. Bu konuda öğrencilerin ilgilerini daha çok çekecek ve onlarda soruyu çözmeye istek uyandıracak problem durumları oluşturularak, konu daha ilginç hale getirilebilir. Örneğin; çarpanlara ayırma konusunda, öğrencilere “ $1750 = 2.5.5.5.7$ olarak verildiğine göre, 1750 sayısının bütün çarpanlarını bulunuz” sorusu sorulursa, öğrenciler soruyu çözmek için daha istekli olacaklardır (Lim, 2009).

Bu konu ile ilgili ders kitaplarındaki sorular, genellikle herhangi bir sayının çarpanlarına ayrılması üzerinedir. Bu tarz sorularda öğrenciler öğrendikleri kuralı defalarca benzer sorulara uygulayarak çözümü bulmaktadırlar. Öğrenci, benzer soruları tekrar tekrar çözdüğünde çarpanlara ayırma konusu ile ilgili yeni bir bilgi öğrenmeyip zaten bildiği bir kuralı –örneğin çarpan ağacı oluşturarak çarpanlarına ayırma- benzer sorulara uygulayarak, kuralı pratik etmiş olacaktır. Ancak amaçlanan, öğrencinin o konu hakkında farklı düşünme yolları geliştirmesidir.

2.7.2.3.Muhakeme

Öğrencilerin oluşturdıkları anlama ve düşünme yollarının içselleştirmeleri için, bu anlama ve düşünme yollarını muhakeme etmeleri gerekmektedir. Tekrarlanan deneyimlerin, birbirine bağlı bilişsel yapılar oluşturmada ya da bu yapıların yeniden düzenlenmesinde rolü büyüktür. Böyle bir yapının oluşturulması, bilginin kazanılmasını sağlamaktadır. Bu sayede yeni bilginin oluşmasına katkı sunan yansıtıcı soyutlama gerçekleştirilmiş olur. Öğrenciler, matematiksel bilgilerini -düz bir şekilde öğretilmesinden- deneyim ve pratikler yardımıyla daha iyi oluşturmakta ve içselleştirmektedirler (Cooper, 1991). DNR'ye göre pratikler, deneyimler istedik anlama ve düşünme yollarının pekiştirilmesini sağlamaktadır. Bahsi geçen pratikler, sadece alıştırma ya da rutin problemlerin çözümü olarak düşünülmemelidir (Harel, 2008b). Burada oluşturulacak olan problem durumları, daha çok öğrencilerin bilgilerini uygulayıp, içselleştirecekleri ve yeniden organize edecekleri problemler olarak düşünülmelidir. Dikkat edilmesi gereken nokta, problemlerin öğrencinin değişen zihinsel ihtiyaçlarına cevap verecek şekilde ve öğrencinin zihninde karışıklığa neden olacak şekilde organize edilmesidir. Bu sayede öğrencinin zihninde dengesizlik oluşacak ve düzenleme süreci sonucunda yeni bir denge durumu oluşturularak yeni bilgi elde edilebilecektir.

Bu çalışmanın ön uygulaması sırasında öğrencilerden iki tek sayının toplamının çift sayı olduğunu göstermeleri istenmiştir. Öğrencilerden çoğunluğu herhangi iki tek sayıyı toplayıp sonucun çift sayı olduğunu göstermişlerdir. Ezgi de işlemini benzer şekilde ilerletip $1+1=2$, $3+3=6$, $3+9=12$, $5+7=12$. O zaman bu bütün sayılar için doğrudur. O yüzden iki tek sayının toplamının çift sayı olduğunu göstermiş oldum" şeklinde ifade etmiştir. Ancak Ali bu kuralı şu şekilde göstermiştir: "Diyelim sayılardan biri $2n-1$ olsun. Diğer sayı da $2k-1$ olsun. O zaman bu ikisini toplarsak $(2n-1)+(2k-1)=2n+2k-2=2(n+k-1)$ olur. Yani son sayı, bir sayının 2 ile çarpılmış şeklidir. 2 ile çarpılan sayılar da çift sayılardır." Ali yaptığı işlemde öğrencilerin çoğunluğu gibi sayı değerleri vererek bazı durumlar için kuralın doğru olduğunu göstermektense, tüm sayılar için kuralın doğru olduğunu göstererek kuralı genelleme yoluna gitmiştir. Ezgi'nin yaptığı gibi sayı değeri vererek ifadenin doğru olduğunu gösterme öğrenciler arasında çok yaygındır. Burada öğrenciler birkaç durum için ifadenin doğruluğunu gösterirler ki bu empirik ispat şemasının bir göstergesidir. Bu şekilde yürütülen düşünme yoluna sonuç odaklı genelleme (*result pattern generalisation*) adı verilmektedir. Burada öğrenciler işlemlerin sonucuna odaklanmaktadırlar. Dolayısıyla birkaç özel örneğin kuralın doğruluğunu sağlaması, o

kuralın geçerli olduğunu söylemeleri için yeterlidir. Ancak Ali, kuralın tüm tek sayılarda çalıştığını göstermek istemiş ve kuralı tek sayılara genellemiştir. İlk düşünme şeklinde sonucun devamlılığı önemli iken, ikinci düşünme şeklinde sürecin devamlılığı önemlidir. Harel (2008a) bunu süreç odaklı genelleme (*process pattern generalisation*) olarak ifade etmiş ve bunun tümdengelimsel ispat şeması ile ilgili olduğu belirtmiştir.

2.7.3.DNR' nin Kavramları

DNR' nin kavramları üçlü yapı olarak nitelenen zihinsel eylemler, anlama yolları ve düşünme yollarından oluşmaktadır.

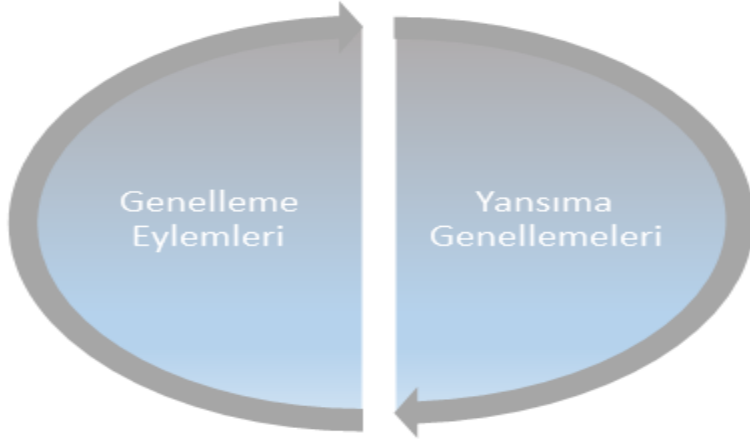
2.7.3.1.Zihinsel Eylemler

İnsanlar sadece bilimle uğraşırken değil hayatlarının her aşamasında açıklama, akıl yürütme, sorgulama, karar verme, problem çözme gibi eylemlerde bulunmaktadır. Dolayısıyla matematiksel düşünmeyi oluşturan yorumlama, tahmin etme, sonuç çıkarma, ispatlama, açıklama, genelleme, uygulama, tahmin etme, sınıflama, araştırma, problem çözme gibi zihinsel eylemler sıkça gerçekleştirilmektedir. Zihninizde gerçekleşen her türlü eylem zihinsel eylemlerimiz olarak adlandırılmaktadır (Harel 2008c).

2.7.3.2.Düşünme yolları ve anlama yolları

Matematik genellikle tanımlar, teoremler, ispatlar, problemler, çözümleri gibi konu alanından ibaret gibi görülmektedir. Oysa bunları oluşturan kavramsal yapılar ihmal edilmektedir. Ancak bilişsel, pedagojik ve epistemolojik olarak her iki kategoriye de ihtiyaç vardır. Dolayısıyla herhangi bir zihinsel eylemi gerçekleştirirken anlama yolu ve düşünme yolu bağlamında iki çeşit bilgiden söz edilebilir. Zihinsel eylemler insanların hareketlerinde ve ifadelerinde gizlidir. Dolayısıyla kişinin ifadeleri ve hareketleri, kişinin zihinsel eyleminin bilişsel ürününü oluşturmaktadır. Böyle bir ürün ise kişinin o eyleme bağlı anlama yolları olarak adlandırılmaktadır. Kişinin zihinsel eylem sonucunda oluşan ürününün yani anlama yolunun bilişsel karakteristiği de düşünme yollarını oluşturmaktadır. Buna göre bir problemin çözümü ya da bir ispat da problem çözme ve ispatlama aktivitelerinin anlama yollarını oluşturmaktadır. Düşünme yolu ise o eylemin bilişsel özelliğidir (Harel, 2007). Örneğin genelleme eylemine ait düşünme yollarını genelleme

eylemleri oluştururken, anlama yollarını ise yansıma genellemeleri oluşturmaktadır. Başka bir anlatımla, yansıma genellemeleri genelleme eyleminin bilişsel ürünü, genelleme eylemi ise bilişsel özelliğidir.



şekil 4. Genelleme eyleminin düşünme ve anlama yolları

Kişinin ifadeleri ve eylemleri, herhangi bir zihinsel eyleme ilişkin bilişsel bir ürün olarak ifade edilebilir. Böyle bir ürün kişinin o eyleme ilişkin anlama yollarını oluşturmaktadır. Eşitlik işareti, pek çok öğrenci için işlem yapıp sayısal bir değeri elde edecekleri bir komut olarak algılanmaktadır (Falkner, Levi & Carpenter, 1999). Bu çalışma kapsamında uygulanan kavramsal cebir testindeki $8 \times 24 = _ \times 48$ ifadesinde hangi sayının boşluğaya gelmesi gerektiğiyi sorusunda bazı öğrencilerin 8 ile 24'ü çarpıp boşluğaya 192 yazdıkları görölmüştür. Bu öğrenciler, eşitlik işaretini “işlem yap” komutu olarak aldıklarından çarpma işlemini yapıp boşluğaya yazmışlardır. Oysa bazı öğrenciler sağıdaki sayılar ile soldaki sayılar arasında ilişki kurmuşlardır. Bu öğrenciler 48'in 24'ün 2 katı olmasından dolayı, eşitliğin bozulmaması gerektiğinden sağıdaki boşlukta 8'in yarısı olan 4 sayısının gelmesi gerektiğini düşünmüşlerdir. Bu öğrenciler ilişkisel olarak düşünebilen öğrencilerdir.

Alan yazın incelendiğinde, DNR tabanlı öğretimin uygulandığı çeşitli tez çalışmaları ile karşılaşılabilir. Güner (2012) çalışmasında matematik öğretmen adaylarının tercih ettikleri ispat şemalarını belirlemiş ve ispata yönelik görüşlerini ortaya koymuştur. Hem nitel hem nicel araştırma yöntemlerinin kullanıldığı bu çalışmada, bir devlet üniversitesinin ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmenliğinde öğrenim gören öğrencilere, ispat şemalarını belirlemeye yönelik ölçme aracı ve ispat yapmaya yönelik görüş ölçeğiyi uygulanmıştır. Araştırmanın sonuçlarına göre öğretmen adaylarının dışsal, deneysel,

analitik ispat şemalarına sahip oldukları belirlenmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının ispat yaparken zorlandıkları ve ispata yönelik görüşlerinin net olmadığını da belirtilmektedir. Lim (2006) öğrencilerin problem çözme eylemlerini, sezme (*foresee*) ve öngörme (*predict*) eylemleri olmak üzere iki tahmin etme (*anticipate*) eylemi üzerinden karakterize etmiş ve bu eylemlere yönelik düşünme ve anlama yollarını ortaya koymuştur. Bu amaçla 14 tane on birinci sınıf öğrencisiyle görüşülmüştür. Bu öğrencilerden 4'ü ile eşitsizlik ve denklem konularında birebir çalışılmıştır. Araştırmanın sonucunda *impulsive*, *tenacious*, *explorative*, *analytic* ve *interiorized* olmak üzere sezme eylemine ait 5 düşünme yolu; *association-based*, *comparison-based* ve *coordination-based* olmak üzere öngörme eylemine ait 3 düşünme yolu tanımlanmıştır. Ayrıca eşitsizlik/denklem (I/E) konularında öğrencilerin anlama yolları ise *I/E-as-a-signal-for-procedure*, *I/E-as-a-static comparison*, *I/E-as-a-proposition*, *I/E-as-a-constraint*, ve *I/E-as-a-comparison-of functions* olarak belirlenmiştir. Çalışmada öğrencilerin sezme/öngörme eylemlerine ait düşünme yollarının, çözümlerinin doğruluğu ile ve eşitsizlik/denklem konularındaki anlama yollarının kapsamlılığı ile ilgili olduğu bulunmuştur. Ayrıca Maskiewics (2006) ve Ursavaş (2014) biyoloji konularında, Duffy (2006) ise kimya konularında DNR tabanlı öğretim uygulamalarını öğrencilere uygulamışlar ve öğrencilerin bu konulardaki anlama ve düşünme yollarını belirlemişlerdir.

Özetle; Bu çalışma, Harel' in DNR tabanlı öğretimi, Lobato'nun öğrenen odaklı transfer yaklaşımı ve Ellis' in genelleme taksonomisi temelinde şekillenmiştir. Belirtilen konularla ilgili kuramsal bilgiye bu bölümde yer verilmiştir. Bu çalışma kapsamında da tasarlanan DNR tabanlı bir öğretim deneyi öğrencilere uygulanmış ve genelleme süreçleri, taksonomi kullanılarak analiz edilmiştir. Bu amaçla yürütülen çalışmalar bir sonraki bölümde detaylı olarak anlatılmıştır.

BÖLÜM 3

YÖNTEM

Bu bölümde araştırmanın modeli, çalışma grubu, öğretim deneyini hazırlama ve uygulama süreci, elde edilen verilerin analizi, araştırmanın geçerlik ve güvenirlik çalışmalarına yer verilmiştir.

3.1. Tasarı Araştırmaları İçinde Öğretim Deneyi

Tasarı araştırmaları, eğitim politikaları ve uygulamaları araştırmalarının ilişkisini artırma çabalarından doğmuştur. Öğrenme sürecini ve bu süreci destekleyen araçları birlikte ele alarak deneysel çalışmalarla gömülü teoriler geliştirmeyi amaçlayan tasarı araştırmaları, son yıllarda matematik eğitimi araştırmacılarının daha çok ilgisini çekmiştir (Van den Akker, Gravemeijer, McKenney & Nieveen, 2006, s. 3-4). Tasarı araştırmalarında öğretim durumlarının planlanması araştırma boyutunu oluştururken, sürekli analiz ve geriye dönük analiz süreçleri sayesinde öğretim tasarısı geliştirilebilir ve düzenlenebilir bir hâl almaktadır (Cobb & Gravemeijer, 2008). Öğrencinin matematiksel bilgisini nasıl oluşturduğunun araştırılması, aynı zamanda matematik öğretimini de içermektedir (Cobb & Steffe, 1983). Tasarı araştırmalarının birçok çeşidinden biri, öğretim deneyleridir (Molina, Castro & Castro, 2007).

Öğretim deneyleri, araştırmacının öğretim uygulamalarını tasarlayıp düzenlediği kavramsal bir araçtır. Piaget'nin klinik görüşmelerinden elde edildiği söylenebilir. Klinik görüşmelerde öğrencinin mevcut matematiksel bilgisini ortaya çıkarmak amaçlanmaktadır. Oysa öğretim deneylerinde öğrencinin matematik bilgisini nasıl oluşturduğu ve süreç içinde bilgisinde meydana gelen gelişim araştırılmaktadır (Steffe & Thompson, 2000, s. 273). Öğrencilerin matematik öğretimi sırasındaki gerçekleştirdikleri eylemler

incelenmeden, matematik bilgilerine dair bilgi sahibi olunamaz, model ortaya konulamaz. Dolayısıyla öğretim deneyleri, öğretimi de içermelidir (Steffe & Ulrich, 2013).

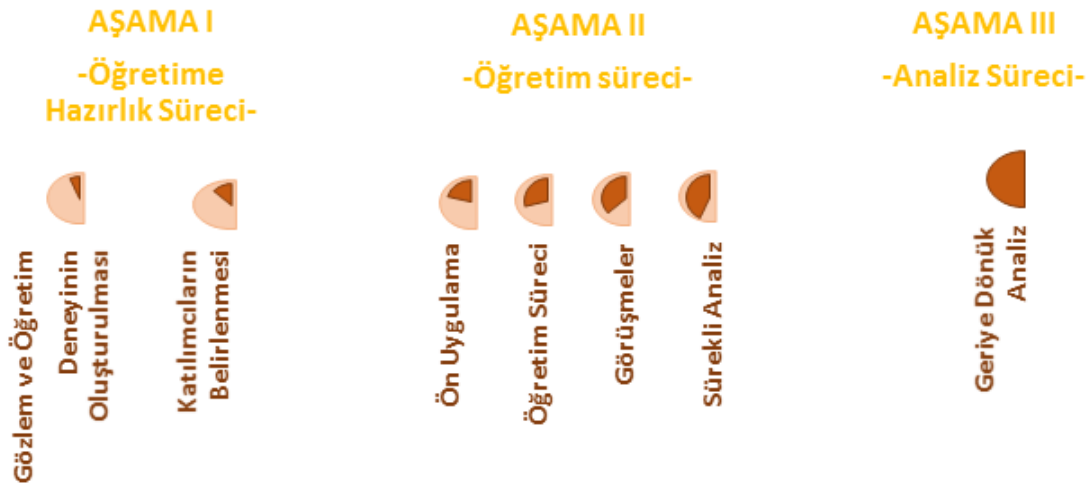
Öğretim deneyleri, bir dizi öğretim uygulamalarından meydana gelmektedir. Bu öğretim uygulamaları öğretmen rolünde araştırmacıdan, bir ya da daha çok öğrenciden, dersi takip eden sınıfın asıl öğretmeninden ve sürecin kayıt altına alınmasından oluşmaktadır (Steffe & Thompson, 2000; Steffe & Ulrich, 2013). Öğretim deneylerinde araştırmacı, araştırmacı/öğretmen rolündedir. Öğrencinin matematiksel eylemlerini çözümlemede ve anlamlandırmada araştırmacının teorik bilgisi önem kazanmaktadır. Araştırmacının sahip olduğu teorik bilgi ancak öğrencinin deneyimiyle buluştuğunda anlam kazanmaktadır. Öğrencinin matematiksel bilgisini oluşturmasını ilk elden görmek ve gelişimine tanık olmak için araştırmacı, öğretmen rolünde olmalıdır. Araştırmacının amacına göre geliştirilen öğretim deneyi bir öğrenciye de uygulanabilir, bir sınıfa da uygulanabilir (Cobb & Steffe, 1983).

Öğretim deneylerinde sorulan her soruya cevap vermek ve her öğrencinin tepkisini yakından takip etmek, öğrencilerin ne düşündüğünü belirlemede oldukça önemlidir. Öğretim deneylerinde sınıftan sorumlu olan araştırmacı/öğretmen öğrencilerin verdikleri her tepkiyi, cevabı takip etmekte zorlanabilir. Bu sebeple sürece tanık olan bir gözlemcinin de sınıfta bulunması önemlidir. Böylece araştırmacı/öğretmenin fark etmediği bir öğrenci eylemi gözlemlenebilir, sorulan kritik sorularla detaylandırılabilir (Steffe & Thompson, 2000).

Öğretim deneyi süreci kayıt altına alınması gerekmektedir. Bu kayıtlar, öğrencinin matematiksel gelişiminin boylamsal analizi için gerekli görülmektedir. Böylece araştırmacı, ekibiyle birlikte öğrencinin eylemleri hakkında tartışabilir ve süreci analiz edebilir (Cobb & Steffe, 1983). Gerek öğretim deneyi süreci sırasında sürekli analiz yapılırken ve gerek süreç sonrasında geriye dönük analiz yapılırken bu kayıtlardan faydalanılmaktadır. Sürekli analiz, öğretim deneyi devam ederken öğrencilerin matematiksel bilgilerinin ve eylemlerinin incelenmesi sonucunda araştırmacının modelini düzenleyerek tekrar oluşturabilmesine imkân sağlar (Simon, 2000). Geriye dönük analiz ise tüm veriler elde edildikten sonra bunların analiz edilip öğrencinin matematiksel gelişimi hakkında bir sonuca varma sürecini ifade etmektedir (Steffe & Thompson, 2000). Böylece hem süreç devam ederken hem de süreç sonunda elde edilen verilerin kavramsal analizi yapılabilir (Steffe & Ulrich, 2013). Öğrencilerin matematiksel gerçekliklerini anlayabilmek için geriye dönük olarak onların ne söyleyip yaptıklarının incelenmesi önem

kazanmaktadır. Öğrencilerin geriye dönük söyleyip yaptıklarının incelenmesi von Glasersfeld (1995) tarafından kavramsal analiz olarak adlandırılmıştır.

Tasarı araştırmaları makro düzeyde 3 aşamadan oluşmaktadır. Bunlar; ön tasarı süreci, öğretim deneyi süreci, geriye dönük analiz sürecidir (Bakker, Doorman & Drijvers, 2003, s.2). Bu çalışma da öğretime hazırlık süreci, öğretim süreci, analiz süreci olmak üzere 3 aşamadan oluşmaktadır. Bu aşamalar aşağıda görüldüğü gibi modellenenabilir.



Şekil 5. Öğretim deneyi modelinin uygulama aşamaları

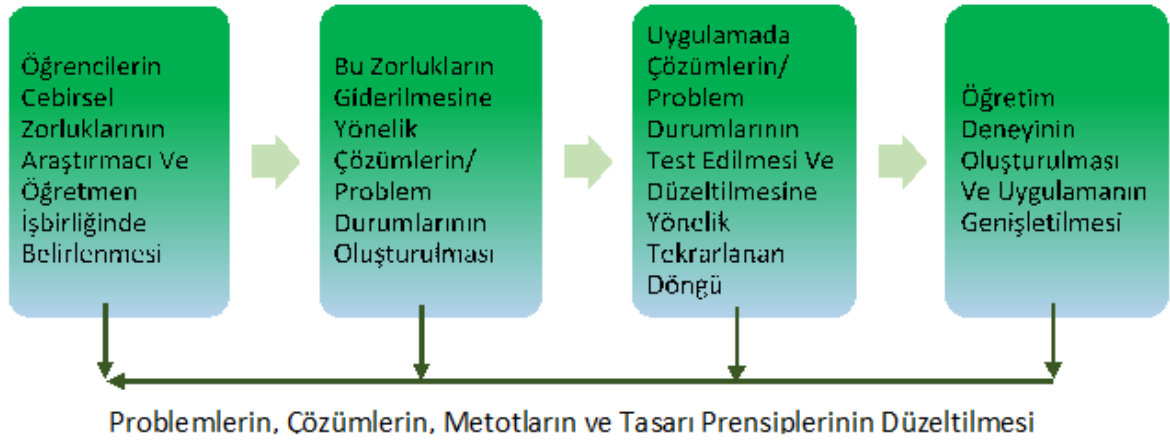
Bu çalışma, şekilde görüldüğü gibi üç aşamadan oluşmaktadır. Bu aşamalar, gözlemlerin yapıldığı ve öğretim deneyinin oluşturulduğu, katılımcıların belirlendiği öğretime hazırlık aşaması; ön uygulamanın yapıldığı, öğretim sürecinin gerçekleştirildiği, öğrencilerle birebir görüşmelerin yapıldığı ve süreç içerisinde sürekli analizin yapıldığı öğretim süreci; bütün süreç tamamlanıp veriler elde edildikten sonra geriye dönük analizin yapıldığı analiz aşamasından oluşmaktadır.

3.2. Aşama I –Öğretime Hazırlık Süreci-

Bu aşama, gözlemlerin yapıp öğretim deneyinin oluşturulduğu ve katılımcıların belirlendiği aşamadır.

3.2.1. Gözlem ve Öğretim Deneyinin Oluşturulması

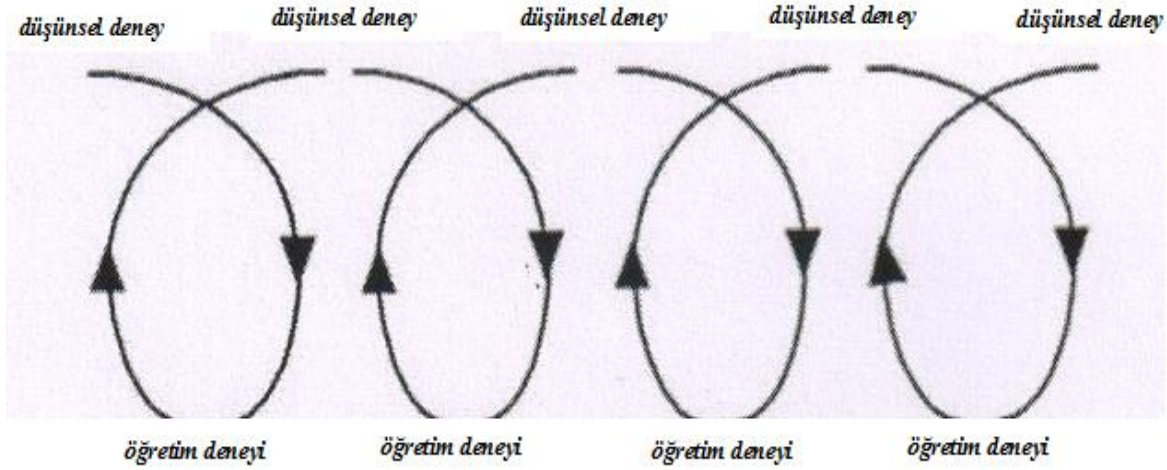
Araştırmacı, öncelikle alan yazını inceleyerek öğrencilerin cebirde yaşadıkları zorlukları belirlemiştir. Teorik olarak bu bilgileri edindikten sonra sınıflarda durumun ne olduğu yakından görebilmek için uygulamanın yapıldığı okuldaki matematik sınıfında 2014-2015 öğretim yılı ile 2015-2016 öğretim yılının ilk döneminde toplam 3 dönem boyunca 7. ve 8. sınıfların cebir derslerini takip etmiş, gözlemler ve çeşitli uygulamalar yapmıştır. Öğretim deneyinin oluşturulması süreci Reeves'den (2006, s. 59) uyarlanarak şu şekilde modellenilebilir;



Şekil 6. Öğretim deneyinin oluşturulma süreci (Reeves'den (2006) uyarlanmıştır)

Tasarı deneylerinin oluşturulması; uygulamaların tasarlanması, yeniden tasarlanması, öğretim uygulamalarının test edilmesi süreçlerinin birbiri ardına gerçekleştirildiği döngü olarak düşünülebilir (Gravemeijer & Cobb, 2006, s. 24). Öğretim tasarısının oluşturulması düşünsel deneylerden oluşmaktadır. Düşünsel deney, öğretim uygulamaları sınıfta uygulanmadan önce araştırmacının, öğretme-öğrenme sürecini planladığı aşamadır (Gravemeijer, 1994, s. 448). Tasarı ve analiz süreçlerinin mikro döngüsü, hipotezin test edildiği deneysel bir döngü olarak değerlendirilebilir. Tasarının geliştirilmesi yani düşünsel deney süreci, öğrencinin zihinsel eylemleri hakkında ve öğretim sürecinin nasıl ilerleyeceği hakkında tahminlerde bulunmayı gerektirmektedir (Gravemeijer & Cobb, 2006, s. 25). Öğretim süreci ise tahmin edilen öğrenme amaçlarına ne ölçüde ulaşıldığının test edildiği, eksik noktaların belirlenip uygulamaların yeniden düzenlendiği aşamadır. Her tasarı araştırması mikro düzeyde düşünsel deneylerin ve öğretim deneylerinin birbirini izlediği döngüsel bir süreçten oluşur. Tasarlanan öğretim deneylerinin makro düzeyde

döngülerle, öğretim deneylerini oluşturan uygulamaların ise mikro düzeyde döngülerle oluşturulduğu belirtilmektedir (Bakker, Doorman & Drijvers, 2003, s. 2). Tasarı araştırmalarındaki düşünsel deney ve öğretim deneyinin mikro düzeydeki döngüsel ilişkisi Gravemeijer ve Cobb'da (2006, s. 28) aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 7. Düşünsel deney ve öğretim deneyi arasındaki döngüsel ilişki (Gravemeijer ve Cobb'dan (2006) alınmıştır)

Bu sürecin ilk aşamasında ilgili alan yazın taranarak öğrencilerin cebirde yaşadıkları zorluklar belirlenmiştir. Teorik olarak bu bilgiler edinildikten sonra, sınıfta durumun ne olduğunu belirlemek için araştırmacı matematik derslerini gözlemlemiş, her ders sonunda öğretmenle fikir alışverişinde bulunarak öğretmenin deneyimlerinden yararlanılmıştır. Bu şekilde bir işbirliği ile öğrencilerin cebirsel zorlukları ve öğretim deneyinde üzerinde durulması gereken kritik noktalar belirlenmiştir. Bu süreç 1 dönem boyunca devam etmiştir.

Öğrenci zorluklarının belirlenmesi üzerine öğretim deneyini oluşturan konular örüntü ve ilişkiler, değişimin analizi, denklemler olarak belirlenmiştir. Konular bu şekilde belirlendikten sonra, çalışmanın en kritik ve zor olan aşaması görevlerin/problem durumlarının oluşturulması sürecine geçilmiştir. Görevlerin oluşturulmasında dikkat edilen en önemli husus, öğrencilerin zihinlerinin karışmasını sağlayacak ve çözmek için istek duyacakları nitelikte görevler belirlenmesiydi. Oluşturulan görevler 2 dönem boyunca sınıfta araştırmacı ya da öğretmen tarafından uygulanmış, öğrenci tepkileri değerlendirilmiş, anlaşılmayan yerler düzeltilmiş ve uygulanan öğretim deneyine son hali verilmiştir. Uygulanan öğretim deneyinde görevlerin haftalara göre dağılımı ve görevlerin ilişkili olduğu konular aşağıdaki tabloda gösterilmektedir.

Tablo 1

Görevlerin Konulara, Günlere, Haftalara Göre Dağılımı

	Konu	Görevler	Gün	Matematiksel Eylemler
1.Hafta	Öğrencilerin nasıl çalışacakları hakkında fikir sahibi olmaları için ve kameralara alışmaları için 3 gün öğretim deneyindeki benzer sorular hakkında çalışıldı.			
2.Hafta	Örüntü ve İlişkiler	Görev 1, 2	1.gün	Şekil örüntülerinin kurallarını farklı yollardan bulma
		Görev 3, 4, 5	2.gün	
		Görev 6, 7, 8	3.gün	Tablo halinde verilmiş sayı örüntüsünün kuralını belirleme, ilişkileri analiz etme
3.Hafta		Görev 9, 10	4.gün	Geometrik şekiller hakkında genellemeye ulaşma
		Görev 11, 12	5.gün	Sayı tablolarındaki örüntüleri keşfetme
	Değişimin Analizi	Görev 13, 14	6.gün	Eğim kavramını değişimlerin analizi boyutunda inceleme
4.Hafta		Görev 15, 16	7.gün	İlişkileri analiz etme, tablo ve grafikte gösterme
		Görev 17	8.gün	Tablodaki ilişkileri analiz etme, kural oluşturma, çoklu gösterimler arası geçiş yapma
		Görev 18, 19	9.gün	Mumun yanması sorusuyla hız kavramının fark ettirilmesi, robotun yolculuğu sorusuyla eğim ve hız arasındaki ilişkinin fark edilmesi
5.Hafta		Görev 20, 21, 22, 23	10.gün	Hız kavramının değişimlerin analizi boyutunda incelenmesi $y=mx$ ve $y=mx+n$ şeklindeki doğruların çizilmesi
	Denklemler	Görev 24, 25	11.gün	Tabloda ve grafikte verilen örüntülerin fark edilmesi
		Görev 26, 27	12.gün	Doğrusal olmayan değişkenler arasındaki ilişkiyi yorumlama Grafığı verilen doğrulara uygun denklem yazma
6.Hafta		Görev 28, 29	13.gün	İki değişken arasındaki ilişkiyi eğri şeklinde gösterme Sözel olarak verilen bir probleme uygun denklem yazma
		Görev 30, 31	14.gün	Tablodaki doğrusal olan ve olmayan ilişkilerin yorumlanması Farklı şekillerde grafik çizme (sütun grafiği gibi)
		Görev 32, 33	15.gün	Tablodaki değişkenler arasındaki ilişkiyi denklem ve grafik şeklinde gösterme, yorumlama Sözel olarak verilen probleme ilişkin çeşitli çözümlerin analiz edilmesi, ilişkilerin grafikte gösterilmesi
7.Hafta		Görev 34, 35	16.gün	Biri artan diğeri azalan iki doğrunun aynı grafikte çizilmesi ve yorumlanması Sabit bir sayı verildiğinde iki değişkenin birbirine göre ilişkisini denklem şeklinde yazma, grafikte gösterme
		Görev 36, 37	17.gün	Sözel olarak verilen bir probleme uygun denklemi yazma, buna ait azalan doğruyu grafikte çizme ve koordinat sisteminde noktasal olarak verilen değişkenler arasındaki ilişkiyi birbirine göre yorumlama

Tabloda uygulanan öğretim deneyindeki görevlerin konulara, günlere, haftalara göre dağılımı görülmektedir. Öğretim deneyi 1 hafta ön uygulama, 6 hafta asıl uygulama olmak üzere 7 hafta sürmüştür. 6 haftalık asıl uygulamada öğrencilere 37 görev uygulanmıştır. Bu görevlerin oluşturulma amacını kısaca açıklamak gerekirse; 1-5. görevlerde öğrencilere çeşitli şekil örüntüleri verilmiş ve örüntülerle ilgili çeşitli sorular sorulmuştur. Öğrencilerden öncelikle bir sonraki adımın şeklini çizmeleri ve örüntünün kuralını sözel olarak ifade etmeleri istenmiştir. Böylece öğrenciler, eksik oldukları düşünülen örüntü

kuralını sözel olarak ifade etmeye zorlanmışlardır. Örüntünün 10. adımının neye benzeyeceğinin sorulmasıyla da, uzak bir adımın zihinde canlandırılıp ifade edilmesi beklenmektedir. Sonrasında ise öğrenciler buldukları örüntü kuralını farklı yollardan bulmaya çalışmışlardır.

6-7. görevlerde ise aritmetik ve geometrik olarak artan sayı dizisi, tablo halinde verilmiş ve sonrasındaki adım ile uzak bir adımı bulmaları istenmiştir. Böylece öğrencilerin, verilen tablodaki örüntünün kuralını bulmaya çalışmaları da sağlanmıştır. 8. görevde ise verilen şekillerdeki siyah ve beyaz fayans sayılarının kuralını bulup, bu kurallarla ilgili akıl yürütmeleri istenmiştir. Bu görev, TIMMS (2011) sınavından alınmıştır.

9. görevde ise çokgenlerin kenar sayısı, tek köşesinden çizilen köşegen sayısı ve bu köşegenlerin oluşturduğu üçgen sayısından yola çıkarak verilen çokgenlerin iç açılar toplamına ait bir kural bulmaları istenmektedir. Böylece öğrenciler, geometri dersinden bildikleri bu kuralı kendi çabalarıyla oluşturmuşlardır; cebir ve geometri dersleri arasında ilişki kurmuşlardır. Bu görev, TIMMS (2007) sınavından alınmıştır.

Sayı tabloları, örüntülerin keşfi için ideal araçlardır (van De Walle vd., 2003). Bu sebeple 10. ve 11. görevler oluşturulmuştur. Satır ve sütunlarda bulunan sayılar için ayrı kurallar geliştiren öğrencilerin, sayı tablolarında bulunan farklı sayı ilişkilerini de yorumlamaları planlanmıştır. Bu görevler van De Walle vd.'den (2003) uyarlanmıştır. Benzer şekilde 12. görevde de öğrencilerden sayı tablosundaki soruya benzer mantık yürüterek koltukların nerede bulunduklarını göstermeleri istenmiştir. Ayrıca koltuklara ait satır ve sütun numaralarını da nokta grafik olarak göstermeleri istenmiştir. Böylece zihinlerinde 3 boyutlu olarak canlandırdıkları koltukların yerlerini, 2 boyutlu olarak düşünmüşler ve düzlemde göstermişlerdir.

13. ve 14. görevlere gelindiğinde ise eğim kavramı, doğrunun eğiminden yola çıkılarak kaç birim sağa/sola, yukarı/aşağı gidildiği hesaplanarak birbirlerine oranlarının alınmasıyla bulunmaktadır. Doğru sağa yatık olunca eğimi neden pozitif olur, sola yatık olunca eğimi neden negatif olur sorularının cevabı, bu görevle verilmektedir. Ayrıca bu görevle öğrenciler, bir doğru üzerindeki tüm noktaların eğimlerinin aynı olduğunu da öğrenmektedirler. Bu görevlere, NCTM'nin (t.y.).

<https://illuminations.nctm.org/Lesson.aspx?id=2570> adresinden ulaşılmıştır.

15. görevde ise verilen çokgenlerin kenar sayıları ile çevre uzunlukları arasında bir ilişki bulan öğrencilerden, bu ilişkiyi grafik üzerinde göstermeleri istenmektedir. Böylece

üçgene, dörtgene ve beşgene ait bu noktaların bir doğru ile birleştirilip birleştirilmeyeceğini, hangi doğrunun neden daha dik olduğunu da muhakeme etmeleri istenmektedir. Bu görev van De Walle vd.’den (2003) alınmıştır. Benzer şekilde 16. görevde de öğrencilerden çevre uzunluğu verilen bir dikdörtgenin kısa ve uzun kenar uzunluklarının alabileceği değerler üzerinde düşünmeleri istenmektedir. Biri artan diğer azalan değerler alan bu uzunlukların grafiğe dökülmesiyle de öğrenciler azalan doğru hakkında muhakeme etmiş olacaklardır.

17. görevde öğrencilerden tablodaki ilişkileri analiz ederek mumun erimesi ile ilgili çeşitli sorular hakkında muhakeme etmeleri istenmektedir. Ayrıca bu soruda öğrencilerin mumun birim zamanda yanma miktarı ile herhangi bir arabanın birim zamanda aldığı yol arasında bir benzerlik kurmaları da beklenmektedir.

18. göreve gelindiğinde ise tablodaki ilişkilerden yola çıkan öğrencilerin birim zamanda alınan yol hakkında yorum yapmaları beklenmektedir. Bunun için öğrenciler, x ve y sütununun ayrı ayrı ve birbirlerine göre değişimini incelemeleri beklenmektedir. Böylece “birim zamanda alınan yol” ifadesinin hızı verdiği bilgisini oluşturacaklardır.

19. ve 20. görevlerde öğrencilerin birim zamanda alınan yolun, hızı vermesi bilgisini kullanarak benzer şekilde muhakeme etmeleri beklenmektedir. Tablodaki değerlerin grafiğe dökülmesiyle de benzer bağlam üzerinden verilen iki durum hakkında biri artan diğeri azalan iki doğru çizimleri beklenmektedir.

21. ve 22. görevlere gelindiğinde öğrencilerin önceki yıllarda öğrendikleri ancak sıkıntı yaşadıkları doğru denklemi çizme ile ilgili sorulara yer verilmiştir. Araştırmacının gözlemlediği ve alan yazında işaret edilen öğrenci zorluklarını gidermek amacıyla çeşitli denklemler verilmiş, bu denklemlerde x ve y değerlerinin alacağı değerlere ilişkin oluşturulan tablonun öğrenciler tarafından doldurulması istenmektedir. Tabloların oluşturulmasıyla verilen denklemlerdeki x ve y değerlerinin değişiminin net bir şekilde görülmesi sağlanmıştır. Daha sonra bu denklemlere ait doğruların çizilmesi istenmiştir. Burada amaçlanan öğrencinin denklem, tablo, grafik gösterimlerini aynı anda görerek bunların aynı şeyi ifade ettiklerini anlamalarıdır. 23. görevde ise verilen bir doğru üzerindeki iki noktanın bulunması; $x=a$ doğrusu, $y=b$ doğrusu, $y=mx+n$ doğrusu ve bu doğruların eksenleri kestikleri noktalar; bir noktanın doğru üzerinde bulunma şartı; iki doğrunun kesişme şartı hakkında alıştırmalar yapılmıştır.

24. görevde öğrencilerden birbirine göre değişen değerlerin tablo ve grafik gösterimleri üzerinden yorum yapmaları beklenmektedir. Tablo ve grafikteki örüntülerden yola çıkan öğrencilerden, yarışmacıların uzaklık ve zaman değerlerine ait denklemleri oluşturmaları da istenmektedir. Böylece öğrenciler, tablo ve grafikte gördükleri ilişkileri cebirsel olarak da ifade etmiş olacaklardır.

Bu görevlerle birlikte öğrencilerin bir tabloda aranacak ilişkilerin neler olduğunu öğrenmiş olmaları beklenmektedir. 25. göreve gelindiğinde aynı x değerine ait farklı y değerleri ile karşılaşan öğrencilerin, bu değerleri grafikte göstermekte zorlanacakları düşünülmektedir. Daha önce sınıfta öğrenmedikleri “uyum doğrusunu” da bu şekilde öğreneceklerdir.

26. görevde, doğrusal olmayan değerlerin oluşturduğu tablo ve grafik üzerindeki ilişkileri yorumlayan öğrencilerden hangi firmayı seçmeleri gerektiği konusunda bir strateji geliştirmeleri beklenmektedir. Bu soru van De Walle vd.’den (2003) uyarlanmıştır. 27. görevde ise öğrencilerden verilen grafiğe uygun problem yazmaları ve bu problemi çözmeleri istenmektedir. Bu görevin, biri artan diğeri azalan doğrulara ait olan ve bir noktada kesişen bağlamı düşünerek tersten düşünmeye zorlanmaları sebebiyle öğrencilerde zihinsel karışıklık oluşturacağı düşünülmektedir.

28. görevde ise öğrencilerden verilen probleme uygun denklemlerin yazılması istenmektedir. Bağlama uygun şekilde $y=mx$ ya da $y=mx+n$ şeklindeki denklemlerden hangisinin yazılacağına karar veren öğrencilerden bu denklemlere ait doğruları çizerek muhakeme etmeleri de istenmektedir. 29. görevde ise geometrik artan bir örüntüye ait kural bulmaları beklenmektedir. Değişkenler arasındaki ilişkiyi grafikte göstermeleri istenen öğrencilerin, ilişkinin eğri olarak gösterilebileceğini de görmeleri sağlanmıştır.

30. görevde verilen tablodaki ilişkilerin gösterilmesinde farklı grafikler (sütun grafiği gibi) kullanılabileceğinin de gösterilmesi amaçlanmaktadır. 31. görevde birim zamanda alınan yola ait değişen değerlerden oluşan bir tablonun yorumlanması ve bu ilişkilerin denklemlerle gösterilmesi beklenmektedir. Sonrasında ise sorulan sorularla oluşturulan bu denklemlerin muhakeme edilmesi beklenmektedir.

32. görevde öğrencilerden tablolarda verilen ilişkilerin analiz edilerek bu ilişkilere ait denklemlerin yazılması ve grafikte gösterilmesi istenmektedir. Aynı ilişkinin tablo, denklem, grafik şeklinde görüldüğü bu soruda öğrencilerden, başka bir yarışmacının uzaklığının zamana göre değişiminin $y=3x$ olarak verildiği denklemle de muhakeme etmeyi sürdürmeleri beklenmektedir. 33. görevde ise bir problem verilmiş ve bu probleme

ait çeşitli çözümler sunulmuştur. Öğrencilerden, bu çözümleri analiz ederek verilen ilişkilerin grafik üzerinde gösterilmesi istenmektedir.

34. görevde birbirine doğru hareket eden araçlar bağlamında bu araçların yol-zaman denklemlerinin yazılması ve grafik üzerinde gösterilmesi istenmektedir. 35. görevde ise öğrencilerden $ax+by=c$ şeklindeki denklemler üzerinden muhakeme ederek bu denklemlere ait doğruyu çizmeleri beklenmektedir.

36. görevde öğrencilerden verilen probleme uygun denklemi yazarak bu denklemi grafik üzerinde göstermeleri istenmektedir. 37. görevde ise öğrencilerden başlangıçtaki ve 1 saniye sonrasındaki konumları verilen yarışmacıların konumlarının grafik üzerinde gösterilerek muhakeme etmeleri beklenmektedir.

3.2.2.Katılımcıların Belirlenmesi

Bu çalışma, Sivas'ta, sosyo-ekonomik düzey bakımından orta düzeyde bir ortaokulda yürütülmüştür. Katılımcılar, ölçüt örnekleme tekniği kullanılarak belirlenmiştir. Ölçüt örnekleme tekniği, önceden belirlenen bir dizi ölçütü karşılayan durumların çalışılmasını gerektirmektedir (Yıldırım & Şimşek, 2005). Katılımcıların belirlenmesinde bazı ölçütler göz önünde bulundurulmuştur. Bu ölçütlerden ilki, öğrencilerin 8. sınıfta öğrenim görüyor olmalarıdır. Öğrencilerin 8. sınıfta olmalarının nedeni, ortaokulun son sınıfında olmalarından dolayı öğretim deneyini oluşturan konularla ilgili gerekli işlemsel ve kavramsal cebir bilgisine sahip olduklarının düşünülmesidir. Araştırmanın yürütüleceği okulun sekizinci sınıflarında öğrenim gören 167 öğrenciye işlemsel ve kavramsal cebir testleri uygulanmıştır. Öğrenci cevapları, verilen doğru cevap sayısına göre yüksek, orta ve düşük olarak kategorize edilmiştir. Buna göre öğrencilerden doğru cevap sayısına göre 42 tanesi yüksek, 67 tanesi orta ve 58 tanesi de düşük kategoride bulunmaktadır. Araştırmanın katılımcılarının belirlenmesinde ise öncelikle öğrenciler, kavramsal cebir testine verdikleri doğru cevap sayısına göre sıralanmışlar, işlemsel cebir testine verdikleri doğru cevap sayısının yüksek ya da orta olmasına göre de seçilmişlerdir. Bu yönüyle kavramsal cebir testinin, muhakeme gerektiren sorular içermesi nedeniyle belirleyici olduğu, işlemsel cebir testinin ise eleyici olduğu söylenebilir. Katılımcılar, doğru cevap sayılarına göre yüksek ve orta düzey olarak kategorize edilen öğrencilerin içinden, matematik öğretmeninin fikirleri esas alınarak belirlenmiştir. Matematik öğretmeni öğrencileri, matematik sorularında muhakeme edebilen ve düşüncelerini açıkça ifade eden öğrenciler olmalarına göre

belirlemiştir. Bu öğrencilerin de çalışmaya katılmak için gönüllü olmaları üzerine öğrencilerin ailelerine araştırmacı tarafından bir mektup yazılmıştır. Bu sayede ailelerin de araştırmanın amacından, öğrencide oluşturması beklenen faydadan, uygulamanın ne zaman başlayıp biteceğinden, hangi günlerde ve hangi saat aralıklarında yapılacağından haberdar olmaları sağlanmıştır. Ailelerin mektupları imzalayarak öğrencisinin öğretim deneyine katılmasını kabul etmeleri üzerine 12 öğrenci belirlenmiştir. Bu 12 öğrenci, 4'er kişilik 3 grup oluşturacak şekilde gruplara ayrılmıştır. Ancak 1 hafta ön uygulama ve 1 hafta da öğretim deneyine katıldıktan sonra 3 öğrenci uygulamaya devam etmek istemediğini belirtmiştir. Bunun üzerine 3'er kişilik 3 grupta çalışmaya devam edilmiştir. Böylece 4 erkek ve 5 kız öğrenciyle öğretim deneyi tamamlanmıştır. Bu öğrenciler çalışma boyunca takma isimlerle anılmışlardır. Öğrencilerin testlere verdikleri doğru cevaplar, aşağıdaki tabloda görülmektedir.

Tablo 2

Katılımcıların Testlerden Aldıkları Puanlar

	Kavramsal cebir testi	İşlemsel cebir testi	Başarı Düzeyi
Ali	28	14	yüksek
Oğuz	27	14	yüksek
Gül	26	12	yüksek
Koray	26	13	yüksek
Bartu	23	14	iyi
Elif	20	11	iyi
Melike	20	15	iyi
Ezgi	22	13	iyi
Sezen	22	12	iyi

Ali, tüm soruları doğru yanıtlayarak kavramsal cebir testinden en yüksek puanı almıştır. Ali, Oğuz, Gül ve Koray fikirlerini iyi ifade edebilen öğrencilerdir. Cevabı bilmeseler bile akıl yürüterek soruların çözümleri hakkında düşüncelerini çekinmeden ve açıklıkla ifade edebilen öğrencilerdir. Bartu, Elif, Melike, Ezgi ve Sezen başarı düzeyi iyi olarak belirlenen öğrencilerdir. Bu öğrenciler de sorular hakkında muhakeme edebilmekte, ancak bunu her zaman sonlandıramamaktadırlar. Bartu, Elif, Melike fikirlerini açıkça ifade edebilmektedirler. Ezgi ve Sezen fikirlerini ifade etmekte bazen çekimser kalabilmektedirler. Bu sebeple ve matematik öğretmenlerinin fikirleri doğrultusunda, bu öğrenciler iyi başarı düzeyinde belirlenen öğrencilerdir.

Çalışmaya katılan öğretmen, 10 yıllık matematik öğretmenidir. Bu öğretmen, matematik öğretimi adına yeni yaklaşım ve uygulamaları takip ederek bunları uygulayan, yeniliğe açık bir öğretmendir. Öğretmenin de gönüllü olması üzerine çalışma, bu öğretmenle yürütülmüştür. Öncelikle öğretmene çalışmanın amacından bahsedilmiş, daha sonra çalışmayı şekillendiren kuramsal bilgiler süreç içinde öğretmene verilmiştir. Hem öğretim deneyi süresince öğrencileri daha doğru yönlendirmesi için hem de meslek hayatında daha sonra da kullanabileceği bilgiler olması nedeniyle, öğretmene DNR tabanlı öğretim, genelleme taksonomisi, öğrenen odaklı transfer hakkında eğitim verilmiştir.

3.2.2.1. İşlemsel Cebir Testi

İşlemsel cebir testi, 7. ve 8. sınıf cebir kazanımları dikkate alınarak hazırlanmış 10 sorudan ve bu soruların şıklarından oluşmaktadır. Bu testte, öğrencilerin cebir problemlerini nasıl çözdüklerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Bu sebeple ve kazanımlar doğrultusunda oluşturulan sorular hakkında, matematik eğitimi alanında çalışan 5 akademisyen ve 3 matematik öğretmenin görüşü doğrultusunda gerekli düzenlemeler yapılmıştır. Sonrasında bu test, 10 tane sekizinci sınıf öğrencisine uygulanmıştır. Böylece öğrencilerin anlamakta zorlandığı noktalar belirlenerek, testin son hali oluşturulmuştur. Ek 2’de uygulanan işlemsel cebir testi bulunmaktadır.

3.2.2.2. Kavramsal Cebir Testi

Bu çalışmada kullanılan kavramsal cebir testinin soruları da Küchemann (1981) tarafından belirlenen cebirsel düşünme düzeylerine göre oluşturulmuştur. CSMS (Concepts in Secondary Mathematics and Science) projesi kapsamında geliştirilen cebir testinde, 13-15 yaş aralığındaki çocukların cebirsel düşünme düzeyleri belirlenmiştir. Teste verilen cevaplardan yola çıkılarak öğrencilerin cebirsel ifadelerdeki harfleri anlamlandırmaları 6 kategoride incelenmektedir. Bu kategoriler aşağıda açıklanmaktadır.

Harfli sembole değer verme: Bu kategorideki öğrenciler, genellikle harfe sayısal değer vererek ve basit aritmetik işlemlerle sonuca giderler. Örneğin; $a+5=8$ eşitliğinde 5’den 8’e kadar sayıp a’nın değerini bulabilirler.

Harfli sembolü ihmal etme: Bu kategoride öğrenciler, harfin alacağı değeri göz ardı ederek işlemlerini yürütürler. Örneğin; “ $a+b=43$ iken $a+b+2=?$ ” şeklindeki bir soruda son ifadedeki ‘+2’ işlemine odaklanıp ‘a+b’ nin değerini de dikkate alarak işlemi tamamlarlar.

Harfli sembolün nesne olarak kullanılması: Öğrenciler, harfi bir nesnenin adının kısaltılmışı olarak kabul ederler. Burada oluşabilecek sorun, öğrencilerin harfi nesnenin sayısı yerine nesnenin kendisi olarak kabul etmeleridir. Örneğin; “1 dolar, 3 liradır” ifadesinde, dolar ve lira arasındaki ilişkiyi “ $1d=3l$ ” olarak gösteren bir öğrenci harfi bir nesne olarak almıştır.

Harfin bilinmeyen olarak kullanılması: Diğer üç kategorinin tersine, bu kategoride öğrenciler harfi bir bilinmeyen olarak alıp işlem yaparlar. Örneğin; ‘ $3n$ ifadesine 4 ekleyin’ diye söylendiğinde, öğrenciler kendilerine anlamlı gelen 3 ve 4 sayıları ile işlem yapıp $7n$ ya da 7 cevabını verebilirler. Burada n bilinmeyeni göz ardı edilmiştir.

Genelleştirilmiş bir sayı olarak harfli sembol: Bu kategoride harfli ifade, bir sayıyı değil de bir sayı aralığı temsil etmektedir. Örneğin; “ $L+P+N=L+M+N$ ifadesi hangi durumda birbirine eşit olur” sorusunda öğrencilerin P değerinin M değerine eşit olduğu durumu düşünüp cevaplamaları, harfin değerinin bir sayı değil de genelleştirilmiş bir sayı olarak yorumlamaları şeklinde düşünülmektedir.

Değişken olarak harfli sembol: Harfli ifadenin değişen nicelikleri temsilen kullanılmasıdır. Örneğin; “ $2n$ ifadesi mi büyüktür, $n+2$ mi” gibi bir soruda öğrenciler n ’nin 2’den büyük olduğu durumlarda $2n$ ifadesinin büyük olduğunu düşünmeleri, öğrencilerin harfli ifadeyi değişen nicelikler arasındaki ilişki olarak yorumladıklarını gösterir.

Öğrencilerin harfli ifadeleri yorumlamalarına göre yukarıda açıklanan ilk üç kategori düşük anlama seviyesini gösterirken, son üç kategori yüksek anlama seviyesini göstermektedir. Bu kategorilendirmeye göre öğrencilerin cebirsel düşünme düzeylerinin gelişimi dört düzeyde incelenebilir (Küchemann, 1981). Birinci düzeydeki sorular, oldukça kolay ve aritmetik bilgisi ile çözülebilecek sorulardır. Bu sorular, harflerin nesne olarak kabul edildiği ya da harfler içermesine rağmen harflerin göz ardı edilerek çözülebilen sorulardır. İkinci düzeydeki sorular da soyutluluk bakımından birinci düzey soruları ile benzer olup biraz daha karmaşık sorulardır. Bu seviyedeki öğrenciler, cebirsel ifadelerle işlemleri daha kolay yapmakla birlikte harfleri nesne olarak algılamakta, bilinmeyen ya da değişken olarak algılayamamaktadırlar. Üçüncü düzeydeki öğrenciler, artık harfleri nesne olarak değil, bir bilinmeyen olarak anlayabilirler. Ancak karmaşık soruları hala yapamamaktadırlar. Dördüncü seviyeye gelindiğinde ise öğrenciler, harfleri bilinmeyen, değişken ya da bazı sayıların temsilcisi olarak alıp daha karmaşık yapıda olan soruları yapabilmektedirler.

Bu çalışmada kavramsal cebir testinin kullanılmasının amacı, öğrencilerin cebir konularındaki kavramlara ait bilgilerini görmek ve buna göre öğretim deneyine katılacak öğrencileri belirlemektir. Öğrenci belirleme sürecinde dikkate alınan en belirleyici husus, öğrencilerin cebir konusunda belirli bir alt yapıları olmaları ve cebirsel düşünme bakımından belirli bir seviyede olmalarıdır. Bu sebeple bu çalışmada harfli sembollerin sınıflandırılması ve cebirsel düşünme düzeyleri dikkate alınarak araştırmacı tarafından oluşturulan ve bu çalışmanın amacı doğrultusunda şekillenen sorulardan oluşan kavramsal cebir testi kullanılmıştır. Ancak oluşturulan kavramsal cebir testinde kullanılan 20i-ii, 10i ve 11. sorular Küchemann'dan (1981) alınmış olup 6. soru da Küchemann'dan (1981) uyarlanmış bir sorudur. 15ii sorusu ise Akkuş Çıkla'nın (2004) çalışmasından alınmıştır. Diğer sorular, çalışmanın amacına göre araştırmacı tarafından hazırlanmıştır. Sonrasında matematik eğitimi alanında çalışan 5 akademisyen ve 3 matematik öğretmeninin görüşü alınarak, test soruları hakkında gerekli düzenlemeler yapılmıştır. Bu test, 10 tane sekizinci sınıf öğrencisine uygulanmıştır. Böylece öğrencilerin anlamakta zorlandığı noktalar belirlenerek, testin son hali oluşturulmuştur. Uygulanan kavramsal cebir testi Ek 3'te bulunmaktadır.

3.3.Aşama II –Öğretim Süreci

Bu aşama, öğrencilerin uygulanacak öğretim deneyleri boyunca kameralar karşısında çalışmaya alışmalarının amaçlandığı ve nasıl çalışacakları hakkında fikir sahibi oldukları ön uygulamadan, öğretim deneylerinin uygulandığı öğretim sürecinden, her ders sonunda iki öğrenciyle birlikte yapılan birebir görüşmelerden, her günün sonunda öğretmen ve araştırmacının birlikte günü değerlendirmeleri ve gerekli görülmesi halinde görevlerde yapılan değişiklikleri içeren sürekli analiz basamaklarından oluşmaktadır.

3.3.1. Ön Uygulama

Öğretim sürecine geçilmeden çalışmanın katılımcıları ile 1 hafta ön uygulama yapılmıştır. Ön uygulamada öğrencilere öğretim deneyindeki sorulara benzer tarzda sorular sorulmuştur. Sorulan sorularda öğrencinin neden öyle yaptığını yazarak çalışmasını detaylandırması istenmiştir. Örneğin; “6 kişinin olduğu bir toplantıda toplam kaç kez el sıkışılır?, 1’den 21’e kadar olan tek sayıların toplamı ile ilgili bir kural geliştiriniz” gibi sorular yöneltilmiş ve soruyu çözerken de tüm düşüncelerini yazmaları istenmiştir.

Böylece öğrencilerin uygulamanın nasıl olacağı hakkında fikir sahibi olmaları sağlanmıştır. Öğrencilerin okul derslerinde hemen işlem yapıp sonucu bulmaya alışık oldukları bilinmektedir. Ön uygulama, öğrencilerin soruyu çözerken yaptıkları işlemlerin detaylarını yazmayı, neden öyle düşündüklerini ifade etmeyi öğrendikleri bir uygulama olarak değerlendirilebilir. Ayrıca öğrencilerin kameralara alışıarak kameralar yokmuş gibi davranmaları da, ön uygulamanın amaçlarındandır.

3.3.2. Öğretim Süreci

Ön uygulamanın tamamlanmasından sonra öğretim deneyi sürecine geçilmiştir. Pazartesi, çarşamba ve perşembe günleri olmak üzere 6 hafta boyunca, okuldaki dersler bittikten sonra matematik sınıfında çalışılmıştır. Her uygulama, 70 dakika ile 100 dakika arası sürmüştür. Öğretim deneyine 12 öğrenci ile başlanmış ancak ilk haftanın sonunda öğrencilerden 3'ü çalışmaya devam etmek istemediklerini belirtmişlerdir. Bunun üzerine 9 öğrenci ile 3'er kişilik 3 grup oluşturularak çalışmaya devam edilmiştir. Her grubu çeken 1 kamera ve sınıfın tamamını çeken ayrı bir kamera olmak üzere her oturum 4 kamera ile kayıt edilmiştir.

Derslerin işlenmesi şu şekilde gerçekleştirilmiştir: Her öğrenciye görevlerin olduğu çalışma kâğıdı verilmiştir. Görevler üzerinde her öğrenci önce bireysel çalışmıştır. Daha sonra grup tartışmasına geçilmiş, her öğrenci fikrini belirtmiş ve grup arkadaşlarıyla tartışma ortamı oluşturulmuştur. Bu aşamada araştırmacı ve öğretmen, grupları dolaşarak her öğrenciyi dinlemeye, sorular sorarak fikirlerini yönlendirmeye çalışmışlardır. Sonrasında herkesin ne düşündüğünü çekinmeden söylemesi sağlanmış ve sınıfta tartışarak çözüm yolları üzerinde durulmuştur. Araştırmacı, hem grup çalışmalarında hem sınıf tartışmalarında 'kafa karıştırıcı' sorular sorarak öğrencilerin zihnindekileri açığa çıkarmayı ve düşündüklerini daha iyi ifade etmelerini sağlamıştır. Böylece her öğrencinin çözümü hakkında tartışılıp hep birlikte çözüm yollarına ulaşılmıştır.

Her dersin sonunda o günkü konuyla ilgili olarak öğrencilerin muhakeme etmelerini sağlayacak 2 ya da 3 soru ödev olarak verilmiştir. Sorular, akıl yürüterek cevabı buldurmaya yönelik sorular olduğu için, soru sayısının çok olup da öğrenciyi sıkmamasına özen gösterilmiştir. Bu ödevler, ertesi oturumda toplanarak incelenmiştir. Dolayısıyla öğrencilerin ödevleri, onların muhakeme etmelerini sağlamanın yanında, belirlenen düşünme ve anlama yollarını destekleyen veriler olarak kullanılmıştır.

3.3.3. Görüşmeler

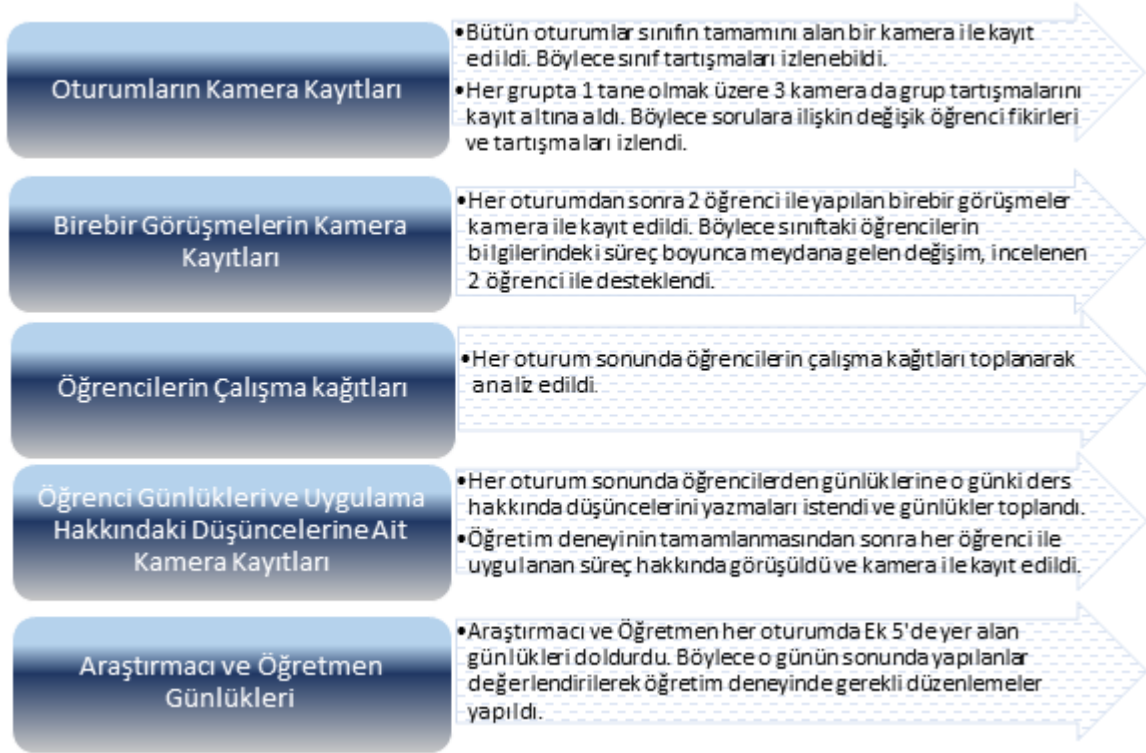
Her oturum sonrasında Ali ve Gül ile o günün ödevleri üzerinde birebir çalışılmıştır. Birebir görüşme için bu öğrencilerin belirlenmesinin nedeni, bu öğrencilerin iyi akıl yürütebilmeleri ve düşüncelerini net bir şekilde ifade edebilmeleridir. Bu öğrencilerle ayrı ayrı, birebir görüşmeler yapılmış ve bu görüşmeler kamera ile kayıt altına alınmıştır. Bu görüşmeler de 15 dakika ile 50 dakika arasında sürmüştür. O gün, ilk öğrenciyle olan görüşme uzun sürdüyse, diğer öğrenciyle ertesi gün öğle arasında matematik sınıfında görüşülmüştür.

3.3.4. Sürekli Analiz

Verilerin analizi, çalışma süreci boyunca yapılan analiz ve çalışmanın tamamlanmasıyla birlikte elde edilen tüm verilerin analizi olmak üzere iki aşamada gerçekleştirilmiştir. Araştırma sürecindeki her aşama araştırmacı ve öğretmen tarafından değerlendirilerek sürekli analiz yapılmıştır. Sürekli analizler, o gün yapılan uygulamanın bir değerlendirilmesi olarak, uygulanan öğretim deneyinin öğrencide gerçekleştirmeyi beklediği değişime ulaşp ulaşmadığının değerlendirilip, ileride verilecek görevler için gerekli düzenlemelerin yapılmasını içermektedir (Molina, Castro & Castro, 2007; Simon, 2000). Her dersin sonunda araştırmacı ve öğretmen fikir alışverişinde bulunmuş, kamera kayıtları ve öğrencilerin çalışma kâğıtlarının kısa bir analizi yapılmıştır. Bu sayede ertesi derste uygulanacak olan görevler düzenlenmiştir.

3.4. Veri Toplama Araçları ve Veri Toplama Süreci

Öğretim deneyinin uygulandığı II. aşamada veri toplama süreci de gerçekleştirilmiştir. Oturumlarda sınıfı çeken kamera kayıtları, öğrencilerin tartışmalarını içeren grupların kamera kayıtları, oturumlardan sonra 2 öğrenciyle yapılan birebir görüşmelerin kamera kayıtları, öğretim deneyi tamamlandıktan sonra her öğrenciyle gerçekleştirilen ve süreç hakkındaki fikirlerinin alındığı kamera kayıtları, öğrencilerin çalışma kâğıtları, öğrenci günlükleri, araştırmacının ve öğretmenin gözlem notları bu çalışmanın veri toplama araçlarını oluşturmaktadır. Aşağıdaki şekilde, verilerin nasıl elde edildiği özetlenmektedir.



Şekil 8. Veri toplama süreci

Oturumların kamera kayıtları: Her ders, sınıfın tamamını çekebilen 1 kamera ile kayıt altına alınmıştır. Böylece sınıf tartışmaları, öğrencilerin jest ve mimikleri daha sonradan izlenip analiz edilmiştir. Ayrıca öğrencilerin kendi aralarında tartışmalarını da izleyebilmek için her grup ayrıca kamera ile kayıt altına alınmıştır. Bu kayıtlar hem sürekli analiz aşamasında hem de geçmişe dönük analiz aşamasında kullanılmıştır.

Birebir görüşmelerin kamera kayıtları: Ali ve Gül'ün derslerin sonunda verilen ödevleri çözümleri, araştırmacı ve öğrencinin birlikte olduğu matematik sınıfında kayıt altına alınmıştır. Böylece, birebir çalışırken biri iyi seviyede diğeri orta seviyede olan iki öğrencinin farklı düşünme yolları geliştirip geliştirmedikleri ve genelleme süreçleri incelenmiştir.

Öğrencilerin çalışma kâğıtları: Öğrencilere görevlerin verildiği çalışma kâğıtları her dersin sonunda toplanarak analiz edilmiştir. Böylece, grup tartışmalarında ya da sınıf tartışmalarında kaçırılan önemli noktalar tespit edilmiştir. Ayrıca çoklu gösterim içeren sorularda, öğrencilerin çözümlerinden ya da yaptıkları çizimlerden yola çıkarak gelişimleri daha net bir şekilde izlenmiştir.

Öğrenci günlükleri ve uygulama hakkındaki düşüncelerine ait kamera kayıtları: Her dersin sonunda öğrencilerin o günkü dersi genel olarak değerlendirmeleri istenmiştir. Her gün

aynı sorulara cevap vermek sıkıcı olacağından sorular değiştirilmiş, bazen uygulama hakkında metafor üretmeleri istenmiş, bazen açık uçlu sorularla fikirleri alınmış, bazen ifadeler verilip bu ifadeye katılma derecelerini nedenleriyle birlikte yazmaları istenmiştir. Genel olarak öğrenci günlüğünde bulunan sorular Ek 4'te verilmiştir. Uygulama tamamlandıktan sonra ise araştırmacı her öğrenci ile ayrı ayrı görüşmüş ve onlara öğrenci günlüğündeki sorulara benzer sorular sorarak öğretim deneyini değerlendirmelerini istemiştir. Bu görüşmeler video ile kayıt altına alınmıştır.

Araştırmacı ve öğretmen günlükleri: İşlenen dersle ilgili olarak her gün öğretmen tarafından Ek 5'te yer alan günlük doldurulmuştur. Derslerin sonunda öğretmen ve araştırmacı, öğrencilerin anlamakta zorlandıkları noktalar ve öğretim sürecinin nasıl gittiği hakkında görüşmeler yapmışlardır. Bunun sonucunda araştırmacı, öğretim deneyinde gerekli düzeltmeleri yapmıştır.

3.5. Verilerin Analizi

Kamera kayıtları, sürekli analiz ve geriye dönük analiz teknikleri kullanılarak çözümlenmiştir. Öğrencilerin çalışma kâğıtları, öğrenci günlükleri, araştırmacı ve öğretmen günlükleri ise içerik analizi tekniği kullanılarak çözümlenmiştir. Verilerin analizi, araştırmanın üçüncü aşaması olan analiz sürecinde incelenmektedir. Araştırma sürecindeki her aşama araştırmacı ve öğretmen tarafından sürekli olarak analiz edilmiştir. Bu süreç, ikinci aşamada detaylı olarak ele alınmıştır.

3.6.Aşama III -Analiz Süreci

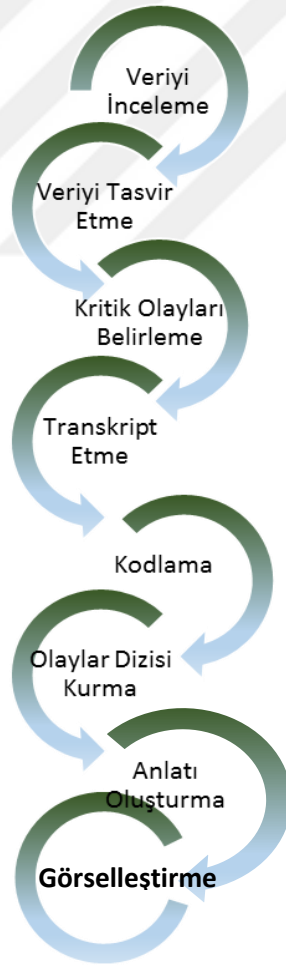
Bu aşama, öğretim deneyinin tamamlanmasıyla birlikte elde edilen tüm verilerin birlikte değerlendirilerek analizlerinin yapıldığı aşamadır.

3.6.1.Geriye Dönük Analiz

Öğretim deneyi oluşturma sürecinin en son aşaması geriye dönük analizin yapılmasıdır. Öğretim deneyi sürecinde yapılan sürekli analizler, uygulamanın öğretimsel amaçlarına ulaşip ulaşmamasının incelendiği ve 'çabuk' analizlerin yapıldığı bir süreçtir. Geriye dönük analiz ise tüm verilerin daha geniş teorik bir çerçevede değerlendirilmesi sürecidir (Cobb, Jackson & Dunlap, 2014, s. 20). Bu çalışmada elde edilen veriler, pek çok farklı

boyutlarda alınan video kayıtları, öğrencilerin çalışma kâğıtları ve günlükleri, araştırmacı notları ve öğretmen günlükleri gibi nitel verilerden oluştuğundan oldukça kapsamlıdır (Molina, Castro & Castro, 2007).

Powell, Francisco ve Maher (2003) öğrencilerin matematiksel düşünmelerindeki gelişimi belirlemek için elde ettikleri video kayıtların analizini yapmak için bir model ortaya koymuşlardır. Matematiksel düşünmenin gelişimini incelemek için oluşturdukları bu analitik model, lineer olmayan ve birbiriyle ilgili olan 7 aşamadan oluşan bir modeldir. Bu çalışmada elde edilen video kayıtları da bu model dikkate alınarak analiz edilmiştir. Bu çalışmada ayrıca öğrencilerin genelleme süreçleri ve genelleme eylemlerine dair bir model ortaya konduğundan, Powell, Francisco ve Maher (2003) tarafından belirlenen modele görselleştirme aşaması da eklenmiştir. Buna göre verilerin analiz süreci şekilde gösterilmektedir.



Şekil 9. Kamera kayıtlarının analiz süreci (Powell, Francisco ve Maher'den (2003) uyarlanmıştır)

Elde edilen video kayıtları Camtasia Studio 8 adlı programa aktarılmıştır. Böylece, her derse ait 4 kameradan elde edilen görüntüleri aynı anda izleme ve sınıfta bir tartışma yürütülürken gruplarda nelerin konuşulduğunu aynı anda dinleme imkânı olmuştur. Bu program videoda istenilen değişikliğin yapılmasına, video üzerine notlar (kodlar) alınmasına da imkân sağlamıştır.

Öğretim deneyi tamamlandıktan sonra elde edilen video kayıtlar 3 kez izlenmiştir. Video kayıtların ilk izlenmesi sonucunda, araştırmacının zihninde sürece dair bir çerçeve oluşmuş ve neler olup bittiğine dair bir fikir edinmiştir. Burada amaç, izlenen kayıtlara yönelik kısa notlar alınarak –örneğin; 1. grupta, 5’06’’de Melike köşegenin ne olduğunu hatırlamadı ve arkadaşlarına sordu- sürecin ana hatlarıyla ortaya konmasıdır. Daha sonra video kayıtları 2 kez daha izlenerek detaylar üzerinde çalışılmış ve analiz sürecine devam edilmiştir. Öncelikle öğrencilerin düşünme süreçlerinin incelenmesinde ve bir model oluşturulmasında belirleyici olan kritik olaylar tespit edilmiştir. Örneğin; öğretim deneyinin 4. gününde sınıf videosunda 12’21’’de Ali’nin çokgene ait köşegen sayısını muhakeme ederek bulması ve kullandığı ifadeler, o günkü konu için kritik bir olay olarak belirlenmiştir. Kritik olaylar bağlamsaldır. Bu çalışmada belirlenen kritik olaylar, video kayıtlarından elde edildiği kadar çalışma kâğıtlarının analizi ile de elde edilmiştir. Kritik olarak belirlenen olaylar, süreci yansıtacak şekilde transkript edilmiştir. Bu süreçte öğrencilerin ifadeleri, hareketleri, mimikleri de kritik olay olarak belirlenmişse transkript sürecine dâhil edilmiştir. Öğrencilerin genelleme süreçleri genelleme taksonomisine göre incelendiğinden kategorilere ait kodlar - örneğin benzer parça araştırma kategorisi için BPA, benzer ilişki araştırma kategorisi için BİA kodları – oluşturulmuştur. Camtasia 8 programı video üzerinde not alma imkânı sunduğundan, bu kodlar video kayıt üzerine yazılmıştır. Böylece, kayıt devam ederken o an yakalanan genelleme eyleminin ne olduğu da görülmektedir. Kritik olaylar belirlenip transkript edildikten sonra bu süreci ve öğrencinin bilgisinde meydana gelen değişimi yansıtacak şekilde olay dizisi kurgulanmıştır. Bütün bu süreçler tamamlandıktan sonra analiz sürecinin belki de en önemli aşaması olan anlatı oluşturma sürecine geçilmiştir. Analiz edildikten sonra veriler anlamlı bir şekilde, bütünselliği bozmadan rapor edilmiştir. Verilerin analizi sonucunda genelleme eylemlerine iki kategori eklenmiş ve öğrencilerin genelleme süreçlerine dair bir model ortaya konmuştur. Böylece analiz sonuçları daha kısa ve görsel olarak modellenmiştir.

Öğrencilerin çalışma kâğıtları ile öğrenci, öğretmen ve araştırmacıya ait günlüklerden elde edilen veriler, içerik analizi tekniği ile analiz edilmiştir. İçerik analizinde amaç birbirine benzeyen verileri, belirli temalar ve kategoriler çerçevesinde bir araya getirmek ve bunları okuyucunun anlayabileceği şekilde düzenleyerek yorumlamaktır (Yıldırım ve Şimşek, 2005). Tema ve kategori oluşturma sürecinde verileri kodlayabilme, kümeleyebilme ve veriler arasında bağlantılar kurabilme kolaylığı sağlayan nitel araştırma veri analizi programlarından biri olan NVivo 8 (Kuş, 2006) programı kullanılmıştır. Oluşturulan tema ve kategorilere ait modellere bir sonraki bölümde yer verilmiştir.

3.7.Araştırmanın Geçerlik ve Güvenirliğinin Sağlanması

Tasarı araştırmalarının bilimselliğinden söz edebilmek için bu araştırmaların geçerlik ve güvenilirlik çalışmaları gerekli görülmektedir. Ancak bu tür çalışmaların geçerlik ve güvenilirliği, deneysel araştırmalara göre daha farklı yollarla yapılmaktadır (Design Based Research Collective, 2003). Tasarı araştırmaları sonucunda elde edilen veriler oldukça hacimli nitel verilerden oluştuğu için bu tür araştırmaların geçerlik ve güvenilirlik çalışmalarında, nitel paradigmaya göre bir yolun izlenmesi gerekmektedir. Geçerlik ve güvenirlüğün saplanması için çeşitli stratejiler kullanılmıştır.

Tasarı araştırmalarının teori, tasarı, pratik, ölçüm gibi süreçlerinin zaman içerisine yayılarak birbirlerini destekler nitelikte yürütüldüğü için çalışmanın geçerliği sağlanmıştır (Design Based Research Collective, 2003). Tasarı araştırmalarında ulaşılan bulguların genellenmesi çabası yoktur. Sürecin nasıl uygulandığı hakkında ayrıntılı açıklama yapıldığı takdirde okuyucuların süreci canlandırmaları, benzer tasarımı uyguladıklarında ne gibi sonuçlar elde edeceklerine dair çıkarımlar yapmaları sağlanmaktadır (McKenney, Nieveen & van den Akker, 2006, s. 86). Bu çalışmanın kavramsal çerçevesi ve test edilen varsayımları ayrıntılı bir şekilde açıklanmış; öğretim deneyinin hazırlanması süreci, uygulama süreci, analiz süreci, araştırmacının rolü, sürecin tasarımı detaylıca betimlenmiştir. Ayrıca elde edilen sonuçlar, verilerle de ilişkilendirilmiştir. Böylece çalışmanın dış geçerliği sağlanmıştır. Araştırmanın geçerliğinin sağlanmasında ayrıca işlemsel cebir testi, kavramsal cebir testi ve öğretim deneyi oluşturulduktan sonra 2 matematik öğretmeni ve 5 matematik eğitimi uzmanının incelemesine sunulmuş ve onların fikirleri doğrultusunda gerekli düzenlemeler yapılmıştır.

Çalışmada veri toplama araçları; dersler esnasında alınan kamera kayıtları, dersler sonrasında iki öğrenciyle yürütülen birebir görüşme kayıtları, öğrencilerin çalışma kâğıtları, öğrenci günlükleri, araştırmacı ve öğretmen günlükleridir. Bu şekilde pek çok farklı kaynaktan elde edilen ve birbirini destekleyen verilerle veri üçlemesi (üçgenleme) yapılmıştır. Veri üçlemesi çalışmanın güvenilirliğini ve iç geçerliğini sağlamada önemli bir tekniktir (Miles & Huberman, 1994).

Öğretim deneyinin hazırlanması ve uygulanması sürecinde doğal olarak bir ekip çalışması vardır. Araştırmacı hem öğretim durumlarını tasarlayan hem de tasarısını uygulayıp, uygulama sonuçlarını eleştirerek tekrar düzenleme yapan kişi olduğundan “tasarı araştırmacıları genellikle hem avukat hem eleştirmen rolündedirler” (Design Based Research Collective, 2003, s. 7). Etkinliklerin hazırlanması aşamasında etkinliklerin uygulanması, öğretmenle yapılan görüş alışverişi sonucunda gerekli düzenlemelerin yapılması ve tekrar uygulanması, ayrıca uzman görüşünün de alınması araştırmanın geçerliğini ve güvenilirliğini sağlayan önemli bir unsurdur.

BÖLÜM 4

BULGULAR VE YORUMLAR

Araştırmanın bu bölümünde, elde edilen verilerin analizi sonucunda elde edilen bulgular, araştırmanın alt problemlerine göre değerlendirilerek yorumlanmıştır. Araştırmanın bulguları alt problemlere uygun olarak düzenlenmiştir. Buna göre ilk olarak öğrencilerin genelleme süreçlerine ilişkin düşünme yolları, daha sonra öğrencilerin genelleme süreçleri sonucunda ortaya koyduğu anlama yolları belirlenmiş ve en sonunda da öğrencilerin uygulanan DNR tabanlı öğretim ile ilgili düşüncelerine yer verilmiştir. Bulgular, öğrenci ifadeleriyle ve öğrencilerin çalışma kâğıtlarıyla desteklenmiştir.

4.1. Öğrencilerin Genelleme Süreçlerine İlişkin Düşünme Yolları

Bu bölümde öğrencilerin öğretim deneyindeki görevlere ilişkin genelleme süreçlerine dair düşünme yollarına yer verilmiştir. Zihnimizde gerçekleşen her türlü eylem, zihinsel eylemlerimiz olarak adlandırılmaktadır. Zihinsel eylemlerimizin bilişsel özellikleri ise düşünme yollarımızı oluşturmaktadır. Örneğin; genellemenin bilişsel özelliğini genelleme eylemleri oluşturmaktadır. Ellis (2004) genellemeyi süreç ve ürün olarak ele alarak genelleme taksonomisi belirlemiştir. Buna göre genellemenin bilişsel özelliklerini, süreç bazında ele alarak genelleme eylemleri olarak adlandırmıştır.

Önceki bölümde bahsedildiği gibi matematiksel bilgi, işlemsel ve kavramsal bilgi olmak üzere iki boyuttan oluşmaktadır (Gray & Tall, 1994; Hiebert & Lefevre, 1986; Sfard, 1991; Skemp, 1976). Harel'a (2008a) göre matematik, kişinin yürüttüğü zihinsel eylemi sonucunda ortaya koyduğu ürünlerden ve zihinsel eylemin ortak bilişsel özelliklerinden oluşmaktadır. O halde genellemeyi de süreç ve ürün olarak ele almak, matematiğin doğasına uygun olacaktır.

Öğrenme, karşılaştığımız bir durumun zihnimizdeki mevcut bilişsel yapılar ile ilişkilendirilmesi sonucu gerçekleşen bir süreçtir. Dolayısıyla mevcut yapılar ile yeni karşılaşılan durumlar arasında benzerlik kurulabildiği ve ilişkilendirilebildiği sürece öğrenme gerçekleşmektedir. Zihnimizde genelleme için de benzer bir süreç gerçekleşmektedir. Ellis (2004) uyguladığı öğretim deneyinde öğrencilerin soruları çözerken verilen problem durumları, objeler, olaylar arasında benzerlik kurarak ilişkilendirdiklerini; örneğin bir tabloda fark ettikleri örüntünün tüm değerler için aynı olup olmadığını araştırdıklarını; fark ettikleri örüntüyü devam ettirdiklerini ve bütün bu eylemlerin sonucunda cebirsel bir ifade elde ettiklerini fark etmiştir. Bu süreci de genelleme eylemleri ve yansıma genellemeleri olarak yani süreç ve ürün olarak ifade etmiştir.

Burada iki husustan bahsetmek yerinde olacaktır. Birincisi, Ellis genelleme taksonomisini öğrenen odaklı transfere göre şekillendirmiştir. Öğrenen odaklı transferde bireyin zihnindeki mevcut bilgisiyle yeni bilgisi arasında kendi benzerliklerini oluşturma süreci ön plandadır (Lobato, 2003). Yani merkezde öğrenen ve öğrenenin odağında olan şey vardır. Bu durumu matematiğe uyarlayacak olursak, merkezde öğrencinin ‘kendi’ matematiği vardır. Dolayısıyla bu çalışmada da öğrencinin çözümü, matematiksel olarak yanlış olsa da öğrencinin kendi matematiğini yansıttığı için, ele alınarak yorumlanacaktır.

Uygulanan öğretim deneyinde örüntüler ve ilişkiler, değişimin analizi, denklemler konuları ele alınmıştır. Bu konular, öğrencilerin bildikleri konular olup yeni bir konunun öğretilmesi amaçlanmamaktadır. Belirtilen konuların birbirinin devamı niteliğinde ve birbirleriyle ilişkili olarak kavramsal olarak öğrenilmesi amaçlanmaktadır. Dolayısıyla öğrencilerin ilişkileri fark ederek bunu ifade etmeleri de önemli bir bulgu olarak değerlendirilmiştir. Öğretim deneyinde konuların her biri ayrı bir başlık altında ele alınmış ve düşünme yolları bu şekilde incelenmiştir.

4.1.1. Örüntüler ve İlişkiler İle İlgili Düşünme Yolları

Örüntüler ve ilişkiler kapsamındaki görevlerle öğrencilerin şekil ve sayı örüntüsü halinde verilmiş örüntülerin kurallarını bulmaya dair farklı düşünme yolları geliştirebilmeleri, çoklu temsiller halinde verilen örüntülerdeki ilişkileri fark edebilmeleri ve bunları cebirsel ve sözel olarak ifade edebilmeleri amaçlanmıştır. Uygulanan öğretim deneyindeki görevlere ilişkin yaklaşık 250 genelleme eylemi kodlanmıştır. Bunların hepsini vermek

yerine örüntüler ve ilişkiler, değişimin analizi, denklemler konuları ile ilgili olan genelleme eylemleri, süreci en iyi yansıtacak şekilde verilmiştir.

Öğretim deneyinin birinci gününde öğrencilere şekil örüntüleri verilmiş ve bunlarla ilgili çeşitli sorular sorulmuştur. Bu sorularda ilk üç adımı verilen örüntülerin dördüncü ve beşinci adımlarını çizme ile ilgili olarak öğrenciler herhangi bir sorun yaşamamışlardır. 10. adımın neye benzeyeceği ile ilgili olarak öğrencilerin yetersiz ifadelerine rastlanmıştır. Birinci görevle ilgili en doğru ifade Gül'e aittir: "Kaçıncı adımdaysak o kadar blok olacak yani dik olarak 10 tane, sol alt köşede 1 tane olacak." Bunun dışında hiçbir öğrencinin ilk üç görevde 10. adımın neye benzeyeceği ile ilgili olarak doğru ifadelerine rastlanmamıştır. Yetersiz olarak kodlanan ifadelerden bazıları aşağıdaki gibidir.

Ezgi: Yan yana 19 kare olur, ortalarından aşağı doğru 11 kare olur (Görev 4).

Elif: 'T' harfinde 29 tane kare ve n sayısı kadar da aşağı doğru giden kare olacak. Üstte de 19 tane kare olacak (Görev 4).

Oğuz: 11 yatay, 3 dikey (Görev 2).

Ali ve Bartu, her üç görevde de 10. adımı ifade etmek yerine örüntülerin kurallarını bulup 10. adımdaki kare sayısını bulmuşlardır. Öğrenci cevapları dikkate alındığında istenen adımı ifade etmede yaşanan sıkıntı, şeklin zihinde tam olarak canlandırılmaması ya da canlandırılan şeklin ifade edilmesindeki yetersizlikten kaynaklandığı söylenebilir.

Örüntülerin kurallarını bulma ile ilgili olarak öğrencilerin tamamı verilen şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne dönüştürüp kural bulmuşlardır. Örneğin; birinci görevle ilgili olarak Melike diğer tüm arkadaşları gibi bulduğu kuralı şu şekilde ifade etmiştir;

Melike: Şimdi bunları sayısal hale getirdiğimizde 4, 7, 10, 13 diye oluyor. Aralarında 3'er fark var. Yani aralarındaki fark $3n$ oluyor. Birinci terimi bulmak için 1 eklememiz gerekiyor. Yani $3n$ 'e 1 ekleyince kural $3n+1$ oluyor. Diğerlerinde de sonuç aynı çıkıyor.

Araştırmacı (A): Bunu nasıl buldun?

Melike: Öğretmenimiz bu şekilde öğretti.

Öğrencilerin tamamı örüntünün kuralını bu şekilde bulmuşlar ve açıklamalarını "öğretmenlerinin öyle öğrettiği" şeklinde ifade etmişlerdir. Öğrenen odaklı transfer, bireyin karşılaştığı yeni durum ile zihninde mevcut olan hangi bilişsel yapıları, nasıl ilişkilendirdiğine dair önemli ipuçları vermektedir (Lobato, 2003). Dolayısıyla bu süreçte öğrencinin odağının ne olduğu önem kazanmaktadır. Genelleme eylemlerinin

ilişkilendirme basamağında, öğrencilerin daha önce karşılaştıkları iki ya da daha çok problemin, durumun özelliklerinden ya da şekilsel özelliklerinden yola çıkarak bunlar arasında yaptıkları ilişkilendirme söz konusudur. Ancak katılımcıların tümünün kural bulurken yaptıkları ilişkilendirme, daha önce karşılaşılan bir problem, kural, formül olmaktan daha başkadır. Öğrenciler kural bulurken, bunu bir otorite ile ilişkilendirmişlerdir. Burada otorite öğretmen, ders kitabı vb. olabilir. Dolayısıyla bu kategori ilişkilendirme basamağına ‘otorite ile ilişkilendirme’ olarak eklenmiştir.

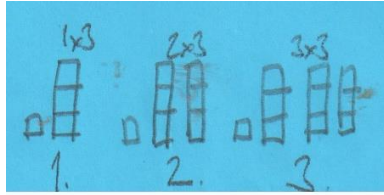
Araştırmacı, 1. görevin 4. sorusu olan örüntünün kuralını başka bir şekilde düşünerek bulup bulamayacaklarını sorduğunda ise;

A: Örüntünün kuralını sınıfta öğrendiğiniz gibi formüle dayalı olarak buldunuz. Bu kuralı farklı bir yoldan daha bulabilir misiniz?

Elif: Farklı bir yol derken?

A: Öğretmeninizin size öğrettiği şekilde formülü uygulayarak $3n+1$ ‘i buldunuz ya, bu formülü bilmeseniz mesela, bu örüntünün kuralını başka bir şekilde düşünerek bulabilir misiniz?

Öğrenciler örüntünün kuralını öğrendikleri formül dışında bir yolla bulmanın ne anlama geldiğini anlamlandıramamışlardır. Daha sonra araştırmacının yönlendirmesi üzerine Oğuz, Bartu ve Melike her bir satırı veya sütunu ayrı ayrı ele almışlardır.



Şekil 10. Oğuz’un çalışma kâğıdı

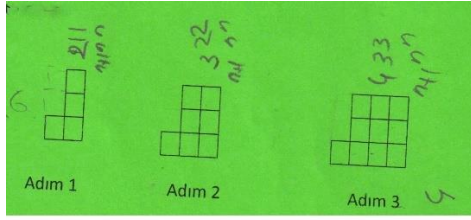
Oğuz: Yani burada 3’er 3’er artıyor. Satırlar sabit kalırken sütunlar artıyor. Terim sayısına göre artıyor. Terim sayısına n dersek, bu n ’in 3 katı şu fazladan 1 kareyi saymazsak ona eşit oluyor. Yani mesela birinci terimde $3 \times 1 = 3$ oluyor, bunun da 1 fazlası, terim sayısını veriyor.

Oğuz, her bir terimde sabit olarak bulunan ve düzenli artan kareleri belirlemiştir. Sonrasında terim sayısı ile terimde bulunan kare sayısından yola çıkarak bu ilişkiyi bir kural halinde göstermiştir. Dolayısıyla Oğuz benzer parça araştırarak örüntünün kuralını bulmuştur.

Sezen: Ben şunu gördüm; burada (adımların üst satırlarındaki kutu sayıları) 1, 2, 3, 4 kutu var. Burada (adımların orta satırlarındaki kutu sayıları) 1, 2, 3, 4 kutu var. Burada ise (adımların alt satırlarındaki kutu sayıları) 2, 3, 4, 5 kutu var.

A: bunu kural haline getirebilir misiniz?

Gül: (birinci adımdaki üst, orta ve alt satırdaki kare sayıları) bu 1, 1, 2; bu 2, 2, 3 diye gidiyor. O zaman n , n , $n+1$ diyebiliriz. Bunları toplarsak da $3n+1$ olur.



Şekil 11. Gül'ün çalışma kâğıdı

Sezen ve Gül, örüntüyü parçalayarak oluşan parçaların kutu sayısını adım sayısı ile ilişkilendirerek bunların toplamından bir kural elde etmişlerdir. Öğrencilerin burada gerçekleştirdikleri eylem, bir örüntüyü oluşturan terimler arasında ilişki araştırmaktan daha farklıdır. Öğrencilerin odağı, bir terimi oluşturan parçaların üzerindedir. Yaptıkları eylem de bu parçaların bütün terimlerde tekrarlanıp tekrarlanmadığını belirleyerek bu değişimin sabit olup olmamasının araştırılmasıdır. Bu eylemin araştırma kategorisinde yer alan eylemlerden farklı olduğu düşünülmektedir. Dolayısıyla bu eylemin 'benzer parça araştırma' kategorisi olarak taksonomiye eklenmiştir.

Öğrenciler verilen diğer görevde (Görev 2) öğretmenlerinin öğrettikleri şekilde kural bulmanın dışında kurala farklı bir yoldan ulaşmaya çalışmışlardır.

Bartu: Hepsine kare ekleyip bunları kapalı şekil haline getirelim. Mesela ilk şekilde ortaya bir kare daha eklese, dikdörtgen olur. İkinci şekilde de ortaya 2 kare daha eklese bu sefer kare olur. Üçüncü şekilde de ortaya 3 kare daha eklese yine dikdörtgen olur.

Ezgi: Dikdörtgensel sayılar gibi. O zaman dikdörtgen, kare, dikdörtgen diye gidiyor.

A: Dikdörtgensel sayılar derken?

Ezgi: Hani gösteriyoruz ya, dikdörtgen şeklinde yazdığımız sayılar vardı.

Ezgi karesel sayılarla oluşan şekiller arasında ilişki kurmuştur. Daha önceden öğrendiği bir bilgi ile bağlantı kurduğundan Ezgi'nin geriye ilişkilendirme yaptığı söylenebilir. Her ne kadar yaptığı ilişkilendirmeyi yanlış bir şekilde ifade etse de önemli olan, öğrencinin odağının

ne olduğudur. Öğrencinin ilişkilendirdiği durumun matematiksel olarak yanlış olması, ilişkilendirilen durumun araştırılmasında engel oluşturmamaktadır.

Bartu: Ama 4. şekil kare olmuyor. Dikdörtgen, kare, dikdörtgen diye gitmiyor o zaman.

Gül: Bunu kural haline getireceğimize göre hepsine kare ekleyip dikdörtgen haline getirsek, o zaman da 2. şekil kare oluyor.

Ezgi: 2. şekle bir de 3'lü sütun eklesek...

...

Bartu: O zaman bu şekilde yapamayız.

A: Dikdörtgen ne demek? Kare ne demek?

Ali: Karenin kenarları birbirine eşittir ama dikdörtgeninki değildir.

A: Yani dikdörtgenin kenarlarının uzunlukları birbirinden farklı mı olacak?

Oğuz: Karşılıklı kenar uzunlukları birbirine eşit olacak ama onlar da birbirinden farklı olacak. Çünkü mesela dikdörtgenin alanı kısa kenar çarpı uzun kenar diye veriliyor. O zaman kısa ve uzun kenarları olmalı.

A: Dikdörtgenin özellikleri nelerdir?

Melike: İç açıları 90 derece ve karşılıklı kenar uzunlukları eşit.

A: Melike dikdörtgenin tanımını verdi; karşılıklı kenarları birbirine eşit ve dik olan dörtgene dikdörtgen denir.

...

Ali: Karşılıklı kenarlar birbirine eşit olacaksa, tüm kenarlar birbirine eşit olabilir mi o zaman?

Gül: Ama o zaman kare olur.

A: Dikdörtgen tanımına göre kenar uzunlukları birbirinden farklı olmalı denmiyor ama.

Gül: O zaman kenarları eşit olursa kare, farklı olursa dikdörtgen.

Öğrenciler karenin ve dikdörtgenin tanımından akıl yürüterek 'her karenin dikdörtgen olması' bilgisini elde etmişlerdir. Van Hiele'in (1986) belirlediği geometrik düşünme seviyelerine göre ikinci aşama olan analiz aşamasında öğrenciler her karenin aynı zamanda bir dikdörtgen olduğunu bilmektedirler. Burada öğrencilerin her karenin aynı zamanda bir dikdörtgen

olduğunun farkına varmamaları, öğrencilerin daha önce tanımlardan yola çıkarak muhakeme etmemeleri ile açıklanabilir.

A: Her bir şekle küçük kareler ekleyerek dikdörtgenler elde ettiniz. Örüntü kuralını nasıl bulabilirsiniz?

Gül: Bu oluşan dikdörtgenlerdeki küçük kare sayısını bulup eklediğimiz kareleri çıkarırsak toplam kare sayısını buluruz.

A: Dikdörtgenlerdeki küçük kare sayılarını nasıl bulacağız?

...

Ali: Dikdörtgenin içinde kareler var ya onların kenarları 1 birim. O zaman birinci şeklin uzun kenarı 3 birim, kısa kenarı 2 birimdir. Diğerlerinde de aynı şekilde.

A: Bunu nereden biliyoruz?

Ali: Öyle hatırlıyorum, bir soruda öğretmenimiz o şekilde çözmüştü. Dikdörtgenin içinde minik karelerden var gibi düşünüp alanını bulmuştuk.

A: Peki bu yolla mesela dairenin alanını nasıl buluruz, dairenin içine kareyi nasıl koyacağız?

Ali: Daire olmaz. Yuvarlak şekiller olmaz. Dörtgenlerin içine koyabiliriz kareleri.

Gül, kareler eklenerek oluşturulan bütünsel şekillerdeki kare sayısını bulup daha sonra bu şekillere eklenen kareleri çıkararak terimlerdeki kare sayısını bulmayı amaçlamıştır. Böylece dikdörtgenin şekilsel özelliği ile ilişkilendirerek benzer prosedür araştırmıştır. Ali ise daha önceden öğretmenin bir soruda yaptığı gibi karelerin bir kenarını 1 birim kabul ederek dikdörtgenlerin içindeki kare sayılarının bulunacağını belirtmiştir. Dolayısıyla Ali, dikdörtgensel bölgenin alanının, içindeki birim kare sayısına eşit olduğunu ifade etmiştir. Ali'nin otoriteyle ilişkilendirerek ifade ettiği bu kural benzer ilişki araştırma süreci ile devam etmiştir.

Melike: Bu dikdörtgenlerin alanlarını bulalım. Alanlarının tamamlanmış hali eklediğimiz kare sayısı kadar fazlası, yani şurada 5 kare var, (tamamlarsak) 1 fazlası, şurada 7 kare var, (tamamlarsak) 2 fazlası. O zaman tamamlamazsak 2 eksiği olur.

A: Neyin 2 eksiği olur?

Melike: Alanın.

Sezen: Hani karelerle tamamlamıştık ya, bunun alanı 6 ediyor birincinin, 1 eklemiştik, geri çıkarıyoruz 5. Diğerlerinde de aynı mantık, hepsinde çıkarıyoruz.

A: O zaman bunu kural haline getirebilir misiniz?

Gül: Bir adımda kaç kare olduğunu nasıl buluruz? Karelerin bir kenarı 1 birim ise dikdörtgenin alanından kısa kenar çarpı uzun kenar olarak bulabiliriz. Burada kısa kenar 3, uzun kenar da adım sayısının 1 fazlası.

A: O zaman alanı ne olur?

Melike: Kısa kenar 3, uzun kenar $n+1$. O zaman alanı $3 \times (n+1)$.

Gül: Ama her şekle kare eklemiştik. Birinci adıma 1 kare, ikinci adıma 2, üçüncü adıma 3 kare. Yani her adıma n kadar kare ekledik. Onu çıkarırsak $3(n+1)-n$ olur.

Melike ve Sezen, dikdörtgenlerden eklenen kare sayılarını çıkararak bunun her adım için geçerli olduğunu ifade etmişlerdir. Dolayısıyla bu eylemleri benzer prosedür araştırma olarak değerlendirilebilir. Gül ve Melike, kısa kenar ve uzun kenarı adım sayısı ile ilişkilendirerek ve her adımda ekledikleri kare sayısı kadar kare çıkararak buldukları kuralı cebirsel olarak ifade etmişlerdir. Böylece uygulanabilirlik alanını genişletmişlerdir.

Ali: $\frac{9n+3}{3}$ de olur.

A: Nasıl buldun?

Ali: Deneyerek. n yerine 1 koy, 9 çarpı 1 artı 3 eşittir 12. Bölsek 3'e, 4 eder. İşte 1. terim. Bunu bulunca $\frac{12n+4}{4}$, $\frac{15n+5}{5}$ in de olabileceğini anladım.

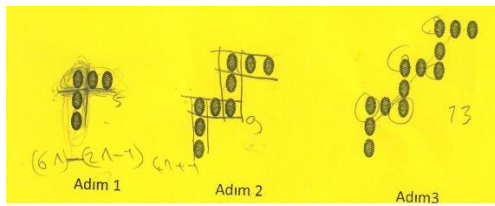
Ali, Bartu ve Oğuz, kuralı ' $3n+1$ ' olan örüntünün kuralının, farklı yollardan $\frac{9n+3}{3}$, $\frac{12n+4}{4}$, $\frac{15n+5}{5}$, $\frac{18n+6}{6}$, olduğunu belirtmişlerdir. Ali, bu kuralı $3n+1$ ifadesini aynı sayı ile çarpıp böldüğünde sayının değerinin değişmeyeceğini düşünerek değil de adımlardaki kare sayılarını verecek şekilde ilişkilendirerek yapmıştır. Adım sayısından yola çıkarak adımdaki kare sayılarını bulma amacıyla yaptığı bu eylem, benzer sonuç araştırma kategorisinde değerlendirilebilir. Daha sonra Oğuz, $3n+1$ 'in aynı sayıyla çarpıp bölünmesinin sonucu değiştirmeyeceğinden bu şekilde sonsuz kural bulunabileceğini ifade etmiştir. $3n+1$ ifadesini çeşitli sayılarla çarpıp bölerek $\frac{12n+4}{4}$, $\frac{33n+11}{11}$, $\frac{3000n+1000}{1000}$ ifadelerini yazmıştır. Oğuz'un bu eylemi ise devam ettirerek genişletme kategorisinde değerlendirilebilir.

Öğretim deneyinde birinci günün sonuna gelindiğinde öğrenciler, örüntü kuralını okulda öğrendikleri gibi bulmanın dışında farklı yollarla da bulabileceklerini fark etmişlerdir. Bu durum önemli bir bulgu olarak değerlendirilmektedir. Daha önce de belirtildiği gibi uygulanan

öğretim deneyinde öğrencilere yeni bir konunun öğretilmesi amaçlanmamaktadır. Öğrencilerde gerçekleştirilmesi beklenen, onların bazı ilişkilerin farkına varmaları ve farklı düşünme yolları geliştirmeleridir. Öğrenciler, görevlerdeki şekil örüntülerini sayı örüntüleri haline getirmişler, sonrasında da sınıfta öğrendikleri formülü uygulayarak örüntünün kuralını bulmuşlardır. Birinci günün sonunda öğrencilerin daha farklı düşünerek örüntü kuralı bulma çabaları, formül uygulayarak zaten buldukları kurala bir şekilde ulaşma çabasına dönüşmüştür.

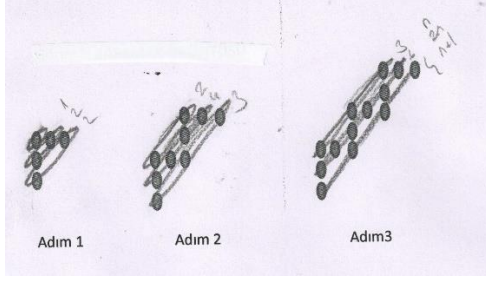
Diğer taraftan araştırmacı günlüğünde belirtildiği gibi, öğrenciler birinci günün sonunda üzerinde çalışılan görevlerden sıkılmışlardır. Birinci günün sonunda bazı öğrenci günlüklerinde de bu şekilde ifadelere rastlanmıştır. Zaten bildikleri örüntü kuralını bulmada farklı yollardan düşünmek zorunda kalmaları ve yaptıkları işlemleri yazarak açıklamaları öğrencilerin alışık olmadıkları eylemler olduğundan, bu beklenen bir durumdur. Sıkılmalarına rağmen araştırmacı ve öğretmen günlükleri, öğrencilerin farklı yollardan düşünmeye başladıklarını göstermektedir.

Öğretim deneyinin ikinci gününde, basamak örüntüsü ile ilgili olarak (Görev 3) öğrenciler birçok düşünme yolu geliştirmişlerdir. Örneğin; Ali bulduğu kuralı şu şekilde izah etmiştir: *“Her adımda adım sayısı kadar satır ve sütun var. Birinci adımda 1 satır, 1 sütun; 2. adımda 2 satır ve 2 sütun. Her satır ve her sütunda 3 nokta olduğundan toplam 6 nokta eder. Adım sayısını 6 ile çarptım. Sonra bunu (satır ve sütunun kesişimindeki nokta) iki kez saydığım için çıkardım. İki kez saydığım noktaların kuralını da buldum. $2n-1$ yapıyor. $6n$ ’den $2n-1$ ’i çıkardım. $4n+1$ ’i buldum”*.



Şekil 12. Ali'nin çalışma kâğıdı

Ali, öncelikle terimler arasındaki ilişkiden yola çıkarak artan birimleri tespit etmiştir. Sonrasında ise terimi parçalayarak terim içinde parçalanmış birimlerden yola çıkarak bir kural bulmuştur. Ali'nin eylemi terimler arasındaki ilişkinin araştırılmasından daha farklı bir eylem olarak değerlendirilmiştir. Çünkü öncelikle terimleri, kendisini oluşturan parçalara ayırıp bu parçaların diğer terimlerde sabit olup olmamasının araştırılması ve sonrasında bu kuralın cebirsel olarak ifade edilmesi, benzer parça araştırma kategorisi olarak değerlendirilmektedir.



Şekil 13. Bartu'nun çalışma kâğıdı

Bartu ise benzer bir bakış açısıyla bulduğu kuralı şu şekilde anlatmıştır: “Burada (1. adımda) köşede 1 tane, diğerlerinde 2’şer tane var. Burada (2. adımda) köşelerde 2 tane, burada 4 tane, burada da 3 tane var. Burada (3. adımda) köşelerde 3 tane, sonra 6 tane sonra 4 tane var. Bir sonrakinde de (adımda da) böyle oluyor. O zaman şu köşelerin kuralı n , sonraki grubun kuralı $2n$, sonrakinin kuralı da $n+1$. Toplamda $4n+1$.” Bartu örüntüyü, kendini oluşturan parçalara ayırarak, bu parçaların diğer terimlerde olup olmadığını kontrol etmiştir. Dolayısıyla bu eylem benzer parça araştırma kategorisinde değerlendirilmiştir.

‘E’ örüntüsünün kuralı ile ilgili olarak (Görev 5) öğrenciler, bir önceki gün bulunan kuralla geri ilişkilendirme yapmışlardır. Öğrenciler kare ekleyerek şekli bir bütün haline getirip, kapladığı alanı bulmaya çalışmışlardır.

Sezen: Alanını tamamlasak birincide 15 kare var, ikincide 28 tane. Ama eklediklerimizi de çıkarmamız lazım.

Melike: Birincide 15 var, 4 çıkaracağız... Şu formüle (öğrendikleri kuralı uygulayarak buldukları kural) ulaşmamız gerekiyor, öyle düşünün.

A: Bu söylediklerinizi kural haline getirebilir misiniz?

Bartu: Geçen dersteki soruda dikdörtgenin alanını bulmuştuk ama orada kısa kenar sabitti. Burada kısa kenar da artıyor, uzun kenar da.

Sezen: Birinci şekilde uzun kenar 5, ikinci şekilde 7. İkişer ikişer artmış. O zaman kuralı,..., $2n+3$ olur.

A: Kısa kenar için ne söylersiniz?

Gül: 3, 4, 5. 1 fazlası kadar artıyor. O zaman $n+2$.

A: O halde oluşturduğum dikdörtgen şeklinde kaç tane birim kare olur?

Ezgi: Dün alanı nasıl bulmuştuk, neyle neyi çarpmıştık?

Öğrenciler, bir önceki gün çözülen problemle bu problem arasında şekilsel bir ilişki kurmuşlar ancak çözüm yolu konusunda sıkıntı yaşamışlardır. Bir önceki problemde yapılan çözüm, dikdörtgensel bölgenin alanının, içinde bulunan birim karelerin sayısı kadar olmasından yola çıkılarak yapılan bir çözümdü. Ancak öğrenciler, dikdörtgensel bölgenin alanının, içinde bulunan birim kare sayısına eşit olduğunu ilişkilendirerek öğrenmediklerinden karşılaştıkları bu problemde birbiriyle çarpılacak iki nicelik aramaya başlamışlardır. Daha sonra Oğuz, kısa kenar uzunluğu ile uzun kenar uzunluğunun çarpılarak dikdörtgensel bölgenin içindeki kare sayısının bulunacağını belirterek, özelliği ilişkilendirmiştir.

Oğuz: $(2n+3)(n+2)$ kadar.

A: Eklediğim birim kareleri de çıkarmam gerekecek...

Gül: Orada (birinci şekilde) 4 tane çıkaracağız, orada da (ikinci şekilde) 12 tane. 3 katı kadar.

...

Ali: $2n^2+2n$ çıkarmamız lazım. Her adımda adım sayısı çarpı adım sayısının 1 fazlası kadar kare ekledik. Ama bunlardan 2 tane ekledik. O yüzden şimdi onları çıkaracağız.

Gül, terimlere eklenen kare sayılarını terim sayısı ile ilişkilendirerek birinci adımda 4, ikinci adımda 12 kare eklendiğinden, her adıma bir önceki adımda eklenen kare sayısının 3 katı kadar kare eklemek gerektiğini düşünmüştür. Oysa Ali, terimleri birimlerine ayırarak bu birimlerin diğer terimlerde sabit olup olamamasını araştırmıştır. Dolayısıyla Ali'nin eylemi benzer parça araştırma kategorisinde değerlendirilebilir.

'E' örüntüsüne ait şeklin çevre uzunluğunu hesaplamada bütün öğrenciler, adım sayısı ile çevre uzunluğu arasındaki ilişkiyi sayı örüntüsü haline getirip bildikleri formülü uygulayarak bulmuşlardır. Ancak Ezgi, terimdeki kare sayısı ile şeklin çevre uzunluğu arasında bir ilişki fark etmiştir: "Burada 11 tane kare var, çevresi 24. Burada 16 kare var, çevresi 34. Yani kare sayısının 2 katının 2 fazlası çevre oluyor. 15. Adımda 81 kare kullanırız. 81'in 2 katının 2 fazlası da 164 eder." Dolayısıyla Ezgi, kare sayısı ile şeklin çevre uzunluğu arasında benzer ilişki araştırarak uygulanabilirlik alanını genişletmiştir.

Öğretim deneyinin ikinci günündeki görevlerde verilen şekil örüntülerinin kuralını bulmayla ilgili olarak öğrenciler, farklı yollarla düşünerek kural bulup, sonrasında sınıfta öğrendikleri formülle, buldukları kuralın sağlamasını yapmışlardır.

Üçüncü gündeki tablodaki sayılar sorusu ile ilgili olarak (Görev 6) öğrenciler, bir süre sorular üzerinde bireysel çalışmışlardır. Sonrasında araştırmacı, öğrencilere tabloda hangi ilişkileri gördüklerini sormuştur.

Ali: Farkları 6.

A: Neyin farkı?

Ali: Terimlerin.

...

Elif: Terimler ile sıra numaraları arasındaki farklar 5'er 5'er artıyor. Yani 1. sırada 4 var, farkı 3; 2. sırada 10 var, farkı 8; 3. sırada 16 var, farkı 13. Bunlar da beşer beşer artmış. Kuralı da $5n-2$ oluyor.

Gül: Hayır, terimler arasındaki kural $6n-2$ oluyor ama.

...

Melike: Zaten $5n-2$ terimler arasındaki artışın kuralı. Biz sıra numaraları ve terimler arasında bir ilişki bulmalıyız.

Gül: Bunların arasında ne fark var?

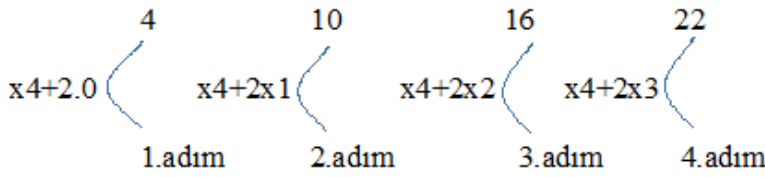
Melike: n . n fark var.

Gül: n 'ler de bunlar (*sıra numaralarını kastederek*) değil mi? Ee ne bulduk biz şimdi? Bundan bunu çıkarınca bunu mu buluyoruz? (*terimden artış miktarını çıkarınca sıra numarasını mı buluyoruz?*)

Öğrenciler, terimler ve terimler ile sıra numaraları arasındaki ilişkileri bulmuşlardır. Terimler arasında 6 fark olduğundan benzer prosedür araştırarak örüntünün kuralını $6n-2$ olarak bulmuşlardır. Daha sonra sıra numaraları ve terimler arasında da bir ilişki olduğundan benzer şekilde benzer prosedür araştırarak örüntünün kuralını $5n-2$ bulmuşlardır. Öğrenciler bir tabloya ilişkin iki kural elde etmişlerdir. Ancak bu kuralların ne ile ne arasındaki ilişki olduğunu ve hangi kuralın bu tablodaki uzak adımı veren kural olduğunu bilememişlerdir. Sonrasında Melike, sıra numaraları ve terimler arasında bir ilişki bulunması gerektiğini ifade etmiştir. Bunun üzerine Gül, bulunan bu kuralların arasında ne fark olduğunu sormuştur. Yapılan muhakemeler sonucunda sıra numarasına artış miktarının eklenmesiyle terimin elde edildiğini ifade etmişlerdir ($n+5n-2=6n-2$). Böylece işlem yaparak genişletmişlerdir. Daha sonra her tablo için sıra numaraları

arasında, sıra numaraları ve terimler arasında, terimler arasında olmak üzere üç tür ilişki olduğunu belirtmişlerdir. Dolayısıyla ayrıntıları uzaklaştırarak genişletmişlerdir.

Ezgi ise terimler arasındaki ilişkiyi sıra numarası ile ilişkilendirerek bulmuştur: “1. adımı 4 ile çarpmışız, 4 bulmuşuz. 2. terimi 4 ile çarpıp 2 ekledik 10 bulduk. 3. terimi 4 ile çarptık 4 ekledik, 16. Yani her adımı 4 ile çarpıp 2’nin katlarını ekledik. İlk adıma 0 ekledik. O zaman kural $4n+(2n-2)$ olmalı.” Ezgi’nin düşünce tarzı şu şekilde somutlaştırılabilir;



Şekil 14. Ezgi’nin çözümü

Ezgi, adım sayısının 4 katına 2’nin katlarını 2 eksilterek eklemiş ve ilgili terimi elde etmiştir. Böylece adım sayısı ile terimi ilişkilendirmiştir. Bu sebeple yapılan eylem, benzer prosedür araştırma kategorisinde değerlendirilebilir. Daha sonra bulduğu bu kuralın diğer adımlarda da sağlanıp sağlanmadığını kontrol ederek uygulanabilirlik alanını genişletmiştir.

Terimleri geometrik dizi olan tabloya gelindiğinde (Görev 7) artık öğrenciler hangi ilişkileri arayacaklarını bilmektedirler.

Gül: İkinci terim birinci terimden 10 fazla, üçüncü terim ikinci terimden 60 fazla, dördüncü terim üçüncü terimden 360 fazla. Bu sayılar arasında da bir ilişki var. Hepsi birbirinin 6 katı.

Melike: O zaman 6^n gibi oluyor.

Gül: Ama bu kuralının kuralı gibi bir şey.

...

Ezgi: Bunlar (terimler) çarpı 6 diye gidiyor. Birinci terimi yazıyoruz. Sonra ortak katı ile çarpıyoruz. Sonra da $n-1$ yazıyoruz üsse.

A: Neden $n-1$?

Ezgi: Geometrik olduğu için. Geometrik dizi olunca öyle oluyordu ya.

Gül, toplamsal düşünmüş ve terimler arasındaki farka odaklanmıştır. Daha sonra Ezgi, bu sayıların arasındaki ilişkiyi araştırarak 6 ile çarpıldığını fark etmiştir. Daha sonra geometrik dizinin kuralı ile ilişkilendirerek 6^{n-1} yazmak gerektiğini ifade etmiştir.

Bartu: 6 ile çarpıla çarpıla gittiği için n’i üssü olarak yazıyorduk değil mi? Ya da bölü mü yazıyorduk? 6^n-4 mü kural?

A: Neden öyle düşündün?

Bartu: Birinci terimi bulmak için.

Bartu da daha önceden öğrendiği kuralla geri ilişkilendirme yapmış ancak kuralı tam olarak hatırlayamamıştır. Bir sayının sürekli 6 ile çarpılmasının, sayının üssü olarak mı yoksa bölümü olarak mı yazılması gerektiğini doğru bir şekilde ifade edememiştir. Bu durum, geometrik dizi kuralı ile ilgili kavramsal öğrenmenin gerçekleşmediği şeklinde yorumlanabilir. Zira kuralın, öğrenciler tarafından otorite ile ilişkilendirerek bulunup bu dizinin geometrik dizi olduğunu ifade etmelerinden sonra araştırmacı, geometrik dizinin özelliğinin ne olduğunu sormuştur. Bunun üzerine sınıfça “çarpı ya da bölü” cevabını vermişlerdir. Bu durum, öğrencilerin geometrik dizi olduğunda bir sayı ile çarpılıp bölünmesini ezberledikleri şeklinde yorumlanabilir. Nitekim Bartu’nun, sayının 6 ile çarpıldığını ifade edip 6’nın üs olarak mı bölümü olarak mı yazılması gerektiğini doğru ifade edememesi, bu düşüncenin bir göstergesi olabilir.

Araştırmacının aritmetik dizinin ne olduğunu sorması üzerine, bütün sınıf bu sefer “artı ya da eksi” şeklinde cevap vermişlerdir.

A: Bir önceki tablo sorusundaki terimleri ele alalım. Sayılar 4, 10, 16,... diye gidiyordu. Terimler arasındaki ilişkiyi nasıl buldunuz?

Melike: Arada hep 6 fark var, 4’ten 10’a, 10’dan 16’ya.

A: Bu geometrik diziyi ele alalım. Gül, dizinin terimleri arasındaki ilişkiyi bulmak için ilk önce ne yaptın?

Gül: İlk ikisi arasında 10, diğer ikisi arasında 60, üçüncü terimle dördüncü terim arasında da 360 vardı.

A: Bu şekilde terimler arası farkı alarak bir kural oluşturabildin mi?

Gül: Olmuyor. Çünkü hepsi birbirinin 6 katı. Ortak eklenen sayı yok ki.

A: O halde aritmetik dizi ile geometrik dizi arasında nasıl bir farklılık olabilir?

...

Ali: Aritmetik dizide aynı sayıyı ekliyoruz, geometrik dizide aynı sayı ile çarpıyoruz.

A: Peki ne olunca dizi aritmetik olur ve ne olunca dizi geometrik olur?

Ali: Terimler arasındaki fark sabitse aritmetik, oran sabitse geometrik olur.

Bu şekilde muhakeme eden öğrenciler, daha önceden bildikleri aritmetik dizi ile ortak fark kavramını, geometrik dizi ile ortak oran bilgisini kavramını ilişkilendirerek öğrenmişlerdir. Dolayısıyla uygulanabilirlik alanını genişletmişler, aritmetik ve geometrik dizi tanımına ulaşmışlardır. Daha sonra araştırmacı aritmetik ve geometrik dizinin bir örüntü oluşturup oluşturmadığını sormuştur.

Melike: örüntü belli bir kurala göre artıştı. O zaman aritmetik dizi örüntü olur. Ama geometrik dizide belli artış yoktu.

A: hepsinde artış olmayabilir ama.

Gül: evet -4 vardı ödevde, ben çözdüm.

Bartu: belli bir kurala göre çarpı, bölü de olabilir.

Melike: o zaman geometrik dizi de örüntü olur.

Melike, öncelikle örüntünün belli bir kurala göre arttığını düşünerek aritmetik dizinin örüntü oluşturacağını ifade etmiştir. Dolayısıyla aritmetik dizideki belirli bir kurala göre artış ile örüntüdeki belirli bir kurala göre artışı ilişkilendirmiştir. Gül ise daha önce çözdüğü problemle ilişkilendirme yaparak sadece artıştan bahsedilemeyeceğini ifade etmiştir. Bartu'nun belirli bir kurala göre kat ya da oran olabileceğini de belirtmesi üzerine Melike devam ettirerek genişletmiş ve geometrik dizinin de örüntü olduğunu ifade etmiştir. Araştırmacı, örüntünün tanımını nasıl yapabileceklerini sorduğunda ise öğrenciler, “belli bir kurala göre olan sıralı diziler” şeklinde tanım vermişlerdir.

Siyah ve beyaz fayans sayılarının sorulduğu görevde (Görev 8) öğrenciler, şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne dönüştürüp kural bulmaktansa şekil üzerinden farklı yollar düşünüp bir kural bulmaya çalışmışlardır. Öğrenciler, birçok düşünme yolu ifade etmişlerdir. Ali, beyaz fayans sayılarının kuralının “teker sayı olarak artıyor. Birinciden ikinciye 3 artmış, ikinciden üçüncüye 5 artacak, büyük ihtimal diğerinde de 7 artacak. Köşelerdeki beyaz fayanslar hepsinde sabit, ortadaki beyazlar da her adımın karesi kadar. O zaman kural da n^2+4 ” olarak açıklamıştır. Siyah fayans sayılarının kuralını Bartu ise

“her kenarda adım sayısı n kadar siyah fayans var. Bunlardan da 4 tane var. O yüzden $4n$ ” olarak açıklamıştır. Dolayısıyla Ali ve Bartu benzer ilişki araştırarak, uygulanabilirlik alanını genişletmişlerdir.

A: Örüntünün kuralı için ne söylersiniz?

Ali: Örüntünün kuralı $(n+2)^2$ ’dir. Siyah ve beyaz fayans sayılarını toplayınca da yani n^2+4 ile $4n$ ’i toplayınca da bu ifadeyi verir bize.

Ezgi: Her şekil bir kare. Yani birinci adımın kenar sayısı 3, ikinci adımın kenar sayısı 4, hep iki fazlası yani. O zaman n . şeklin kenarı da $(n+2)$ eder. İçindeki kare sayısı ise $(n+2)^2$ olur.

Ali, her bir terimdeki siyah ve beyaz fayans sayısının toplamının terimde bulunan toplam kare sayısını vereceğini ifade etmiştir. Ali, siyah ve beyaz fayans sayılarının toplamını n^2+4+4n olarak bulmuş, daha sonra bunu $(n+2)^2$ özdeşliği şeklinde ifade etmiştir.

Siyah ve beyaz fayanslara ait 10×10 ’luk dizilişteki fayans sayılarıyla ilgili olarak;

Ezgi: n yerine 10 koyarsak siyah fayans sayısı 40 olur.

Gül: n yerine 10 koyunca, 10×10 ’luk şekilde 144 kare oluyor ama.

Melike: birinci adımda 3×3 ’lük kare var, ikinci adımda 4×4 ’lük kare var. Ama 10×10 ’luk kare olmuyor. Başta 3×3 ’lük şekille başlandığı için 3 eksiğini almamız lazım. Yani n yerine 7 koymamız lazım.

...

Ali: birinci adımda 3×3 ’lük kare var, onun 2 eksiği adım sayısı... O zaman 10×10 ’luk şekil için 10’dan 2 çıkarıp adım sayısını bulmalıyız.

Bartu: zaten formülde yerine koyunca da çıkıyor, siyah ve beyaz fayans sayısı toplamından. $n^2+4+4n = (n+2)^2 = 10^2$. Buradan n , 8 çıkıyor. Yani 8. adım.

Gül, kuralda yazılan ‘ n ’ harfinin hangi değişken yerine kullanıldığına dikkat etmediğinden, n yerine sorulan 10×10 ’luk dizilişin bir kenar uzunluğu olan 10 sayısını koymuş ve yanlış işlem yapmıştır. Melike ise adım sayısı ile her adımda bulunan kare sayısı arasında bir ilişkilendirme yapmış; ancak bu ilişkiyi doğru ifade edememiştir. Ali ise benzer ilişkiyi araştırarak her kenarda adım sayısının 2 fazlası kadar kare olduğunu belirtmiştir. Bartu ise işlem yaparak genişletmiş ve 10×10 ’luk dizilişin 8. adıma ait olduğunu belirtmiştir.

Öğretim deneyinde birinci haftanın sonuna gelindiğinde, öğrenciler farklı yollar üzerinde düşünmeye ve düşündüklerini ifade etmeye ilk başta zorlanmalarına rağmen, sonraları daha çok zaman ayırmışlardır. Günlüklerinde de çözülen soruları ve ders işleme yöntemini ilgi çekici bulduklarını belirtmişlerdir. Öğrencilerin karşılaştıkları örüntü sorularına formülü uygulayıp kural bulmaktan ziyade değişik şekillerde düşünerek kural bulmaya çalışmaları önemli bir gelişmedir.

Çokgenlerin tablo halinde verilip bazı ilişkileri analiz etmeleri istenen görevde (Görev 9), öğrencilerin matematiğin alanları arasında ilişki kurmaları hedeflenmiştir. Geometri, öğrencilerin geometrik örüntüleri inceleyip aradaki ilişkiyi analiz etmeleri, tablo ve grafikteki genellemelere ulaşmaları açısından oldukça iyi bir alandır (Bay-Williams, 2001). Bu amaçla bu görevde, öğrencilerin verilen çokgenleri inceleyerek kenar sayısı, köşegen sayısı, iç açılar toplamı ile ilgili genellemelere ulaşması beklenmektedir.

Melike, soruyu okuyunca köşegenin ne olduğunu hatırlayamamış ve arkadaşlarına sormuştur. Bartu “bir köşeden diğer köşeye giden” şeklinde bir köşegen tanımı vermiş, Ali ise “bir köşeden bağlı olmadığı köşeye giden doğru parçası” olarak daha doğru bir tanım vermiştir.

Öğrenciler, tabloda verilen çokgenlerin kenar sayısı, köşegen sayısı, köşegen çizildiğinde oluşan üçgen sayısı ve çokgenlerin iç açıları toplamı arasında ilişki araştırmışlardır. Öğrenciler, verilen çokgenlere ait tüm köşegen sayılarını hesaplamışlardır; dörtgenin 2 köşegeni, beşgenin 5 köşegeni. Ali, bu durumu genelleyerek “beşgende 5 tane köşegen var. Beş köşesi var. Bir köşesi kendisi, kendi kendine köşegen oluşturamaz, yanındaki iki köşeye de köşegen oluşturamaz. Bir köşeden iki köşegen çizebiliriz yani, 5 köşe var, toplamda 10 köşegen eder. Hepsini iki kez saydığımız için 2’ye bölüyoruz; 5” şeklinde bir kural oluşturmuştur. Ali’nin gerçekleştirdiği bu eylem, uygulanabilirliğini artırarak genişletme kategorisinde incelenebilir.

Bu görevde, verilen çokgende çizilen köşegenlerin oluşturduğu üçgenlerden yola çıkılarak, iç açılar toplamı hakkında bir genellemeye ulaşılması beklenmektedir. Bu sebeple araştırmacı, öğrencilerden çokgene ait tüm köşegenleri değil de çokgenin bir köşesinden çizilen köşegen sayısı hakkında düşünmelerini istemiştir. Bunun üzerine Ali: “Beşgenin bir köşesinden çizilen köşegen sayısı 2 oluyor. Bir köşe kendisi, iki de sağındaki ve solundaki köşe, onlarla da köşegen oluşturamaz. Geriye 2 köşesi kalıyor. Altıgen için de durum aynı. O zaman bir çokgenin bir köşesinden çizilen köşegen sayısı için o köşesi, sağındaki ve solundaki köşeler hariç geri kalan köşelerine çizilen köşegenlerdir. O da $n-3$ ’tür.” şeklinde

köşegen sayısı ile ilgili bir genellemeye ulaşmıştır. Dolayısıyla Ali, verilen bir durumdan daha genel bir duruma ulaştığı için uygulanabilirlik alanını genişletmiştir.

Sezen: Beşgende de tek köşeden çizilen 2 tane köşegen var. O da şekli 3 üçgene ayırıyor. Altıgende de (tek köşeden çizilen) 3 köşegen var. 4 üçgen oluşmuş.

Gül: İç açıları toplamı dörtgeninki 360. Beşgeninki neydi?

Ezgi: 180-180 gidiyor, dörtgeninki 360, 180 ekle, 540.

Gül: Altıgeninki ne?

A: Neden 180-180 gidiyor?

...

Sezen, köşegen sayıları ve oluşan üçgenler arasında benzer örüntüyü araştırmıştır. Gül'ün beşgenin iç açıları toplamını sorması üzerine, Ezgi daha önceden bildiği ezber bilgi ile ilişkilendirme yapmıştır. Dörtgenin iç açıları toplamının 360^0 olmasından yola çıkarak, beşgenin iç açıları toplamının da dörtgenin iç açıları toplamının 180^0 fazlası olması gerektiğini belirten Ezgi, benzer sonucu araştırmıştır. Araştırmacının neden böyle düşündüğünü sorması üzerine öğrenciler düşünmeye başlamışlardır.

Sezen: İç açıları toplamı mesela beşgen için 3×180 olacak. Orada 2 köşegen çizince 3 tane üçgen oluştu ya o yüzden 3×180 . Altıgende de 4 tane üçgen olduğundan 4×180 olacak.

Gül: Bir şey fark ettim, oluşan üçgen sayısı ile 180'i çarparsak, $(n-2) \times 180$ olur.

Çokgenlere tek köşelerinden çizilen köşegen sayısının şekilde oluşturduğu üçgen sayısından yola çıkarak, çokgenlerin iç açıları toplamı hakkında bir genellemeye ulaşan öğrenciler, benzer ilişki araştırmışlar ve sonrasında uygulanabilirlik alanını genişletmişlerdir.

Sayı tabloları, örüntülerin keşfi için ideal araçlardır. Çünkü sayılar arasındaki ilişkinin araştırılması ve yorumlanmasına imkân vermesi nedeniyle sayı tabloları, ilişkisel düşünmenin gerçekleşmesine yardım etmektedirler (Van de Walle, Karp & Williams, 2003). 10. görevde verilen bu sayı örüntüsünde, öğrencilerin sayılar arasındaki ilişkileri görmeleri amaçlanmıştır. Verilen görevde öğrenciler, sütun örüntülerine ait kuralı bulmuşlar ve çeşitli şekillerde muhakeme etmişlerdir. Sütun örüntüsünün kuralını bulma ile ilgili olarak öğrenciler $4n-3$, $4n-2$, $4n-1$ ve $4n$ kurallarını bulmuşlardır.

A: Baktığınız zaman bir ilişki görüyor musunuz?

Elif: 4'ün katından 1'er 1'er eksilmiş sayılar. 5.de de $4n+1$ mi olacak acaba? $4n$ 'den 3 çıkarmışız, sonra 2 sonra 1 ya, acaba ondan sonra da 1, 2 ekleyerek mi gideceğiz?
Melike: olur hocam. 1 eklersek 5 olur, 4'ün yanına bir sütun daha ekleriz, 5'i oraya kaydırırız.

Ali: Olmaz, eğer 5'i oraya kaydırırsak aradaki fark 5 olur, o zaman $5n$ ile başlar kural.

A: $5n$ ile başlarsa ne olur?

Ali: $5n-4$ olur şurası, $5n-3$, $5n-2$, $5n-1$ diye gider.

En sondaki sütunun $4n$ olmasından hareketle ondan bir önceki sütundan 1 çıkarınca, iki önceki sütundan 2 çıkarınca ve üç önceki sütundan da 3 çıkarılınca ilgili sütundaki sayıların bulunduğunu fark eden öğrenciler, işlem yaparak genişletmişlerdir. Bu durumu devam ettirerek genişleten Elif, 4'ün yanına gelecek diğer sütunlar için de $4n$ 'in üzerine $+1$, $+2$,... eklenmesi gerektiğini ifade etmiştir. Ancak Ali, bir sütun daha eklenirse bu sefer eklenen sütunun kuralının $5n$ olacağını, ondan önceki sütunların da $5n-4$, $5n-3$, $5n-2$ ve $5n-1$ olması gerektiğini belirtmiştir. Dolayısıyla Ali, devam ettirerek genişletmiştir.

A: Bakın 4×4 'lük tablonun sütun örüntüleri için $4n$ den 3 çıkardık, sonra 2 çıkardık, sonra 1 çıkardık. Çıkarılan sayıların bu şekilde olması size bir şey anlatıyor mu?

Ali: Sıralı sayılar.

...

A: Şöyle sorayım, $4n$ den neden 4 çıkarmadık?

Ali: 4'lük tabloda çalıştığımız için $4n$ 'den 1, 2, 3 çıkarıyoruz. $4n$ 'den 4 çıkarırsak mesela 8'den 4 çıkarırsak yine 4. Sütundaki sayıları buluruz.

A: Bir sayıyı 4'e bölersek, kalan sayılar neler olabilir?

Melike: 1, 2, 3 olur.

Bartu: 4 olmaz.

A: Neden olmaz?

Melike: Çünkü yine 4'e böleriz onu, 0 olur.

A: O zaman herhangi bir sayıyı bir n sayısına böldüğümüzde, kalan sayı hangi değerleri alabilir?

Ali: 0, 1 den $n-1$ 'e kadar.

Öğrenciler uygulama alanını genişleterek bir sayının n ile bölümünden kalanların $0, 1, \dots, n-1$ sayılarından biri olacağını ifade etmişlerdir. Böylece öğrenciler, sayı tablosundaki örüntüler üzerinde çalışarak bir sayı ile sayının kalanları arasındaki ilişki hakkında muhakeme etmişlerdir.

Sinemadaki koltuk yerinin bulunmasıyla ilgili olan görevde (Görev 12), öğrencilerin verilen kurala göre koltuk sıralarını zihinlerinde canlandırmaları, koltuklara ait buldukları sıra ve sütun numaralarını grafikte göstermeleri amaçlanmıştır. Böylece koltuk yerlerinin sıralı ikililer şeklinde grafikte gösterilebileceği ile ilgili bir deneyim kazanmış olmaları beklenmiştir.

Gül, bir önceki soruda sayı tablolarının sütun sayılarını o şekilde bulunduğu için, koltukların sütun sayıları ile ilgili olarak $6n-5$, $6n-4$ kuralını bulmuştur. Gül, geriyle ilişki kurarak ve sonrasında da benzer prosedür araştırarak kural bulmaya çalışmıştır. Bunun üzerine Ali, “ama burada 5 sütun var. Bence şöyle olacak; 6 koltukta bir koltuk düzeni başa dönüyor. Az önceki tablo sorusunda hani kalandan bahsetmiştik ya mesela 50 koltukta oturan kişi için 50’yi 6’ya böldüm. 2 kaldı. O zaman baştan 2. koltuğa oturacak. Yani B sütununa” şeklinde bulduğu kuralı açıklamıştır. Ali, bir önceki sayı tablosu sorusunda bahsedilen sayının kalanı özelliğiyle ilişkilendirme yapmış ve benzer prosedür araştırmıştır. Bunun üzerine Bartu, “aynı şekilde kalan 1 olsaydı A’ya otururdu, 3 veya 4 olsaydı C’ye otururdu o zaman” şeklinde ifade etmiş ve benzer prosedür araştırmıştır.

Oturdukları koltukları grafik üzerinde gösterme sorusunda, öğrenciler sıkıntı yaşamışlardır. Öğrencilerden ikisi bar grafikte gösterirken, geri kalan tüm öğrenciler sütun ve sıra numaralarını noktalar halinde gösterip, bu noktaları gelişigüzel birleştirmişlerdir. Araştırmacı da tahtada sütun ve sıra numaralarını noktalar halinde gösterdikten sonra, noktaları yukarıdan başlayarak aşağıya doğru birleştirmiş ve bunun doğru olup olmadığını sormuştur.

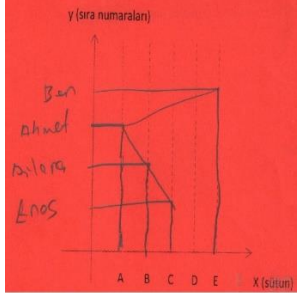
Ali: Bu şekilde olmaz. Çünkü 0’a yakın olan noktadan başlamalıydık çizmeye, yani aşağıdan yukarı doğru çizmeliydik doğruları.

A: Çizdiğim doğru parçası ile Ahmet’le sizi birleştirmek zorunda mıyım peki, mesela Ahmet’le Dilara arasında çizemez miyim doğruyu?

Gül: Bence öyle olmaz. Aşağıdan yukarı doğru olmalı, sıra denen bir şey var.

Öğrenciler, noktaların aşağıdan başlayarak sıra ile yukarı doğru birleştirildiğinde ve yukarıdan başlayarak sıra ile aşağı doğru birleştirildiğinde aynı doğrunun çizildiğini fark

edememişlerdir. “Eksenlere sayılar yazılırken 0’a yakın olan sayılardan başlanır” gibi bir mantıkla, noktaların aşağıdan yukarı doğru sıra ile birleştirilmesi gerektiğini ifade etmişlerdir. Bunun üzerine Bartu, grafiğini tahtada çizmiştir.



Şekil 15. Bartu’nun çalışma kâğıdı

A: Peki Ahmet’le ben arasında çizdiğiniz doğru parçası ne anlama gelmektedir?

Gül: B, C, D var arada.

Ali: Aramızdaki uzaklığı ifade ediyor.

A: Siz grafikte ne göstermek istiyorsunuz? Değişkenleriniz neler?

Gül: Değişken ne?

Öğrenciler, genellikle sürekli değişkenler üzerinde çalıştıklarından koltukların sütun ve sıra sayılarını da sürekli değişkenler olarak düşünmüşler ve noktaları birleştirmişlerdir. Bu noktaları birleştirerek elde ettikleri doğru parçalarının ise ‘iki nokta arasındaki uzaklığı’ verdiğini düşündüklerinden, doğru parçalarının kişiler arasındaki uzaklığı verdiğini ifade etmişlerdir. Araştırmacının, öğrencilerin değişkenler üzerinde düşünmelerini sağlamak için değişkenin ne olduğunu sorması üzerine, öğrencilerin değişkenin ne olduğunu bilmedikleri anlaşılmıştır.

Öğretim deneyinin altıncı gününe gelindiğinde, öğrenciler örüntü ve ilişkileri daha farklı yollardan muhakeme etmeyi öğrenmişlerdir. Araştırmacının, dersler sırasında öğrencilerin nasıl düşündüğünü daha iyi anlamak için sürekli sorduğu “Neden öyle yaptın?” sorusunu, öğrenciler de kendilerine ve birbirlerine sormaya başlamışlardır. Bu durumun, öğrencilerin yaptıkları işlemin farkında olmalarını sağlayan bir alışkanlık olması nedeniyle olumlu bir durum olduğu düşünülmektedir.

4.1.2. Değişimin Analizine İlişkin Düşünme Yolları

Bu bölümde, değişimin analizi ile ilgili düşünme yollarına yer verilmiştir. Öğretim deneyinde değişimin analizi ile ilgili görevler sözel, cebirsel, tablo, grafik halinde verilen değişkenlerin birbirine göre değişimini incelemeyi ve bu değişimini çoklu temsillerle göstermeyi içeren görevlerdir.

Öğrencileri, değişimleri analiz etme konusuna hazırlamak için araştırmacı, öğrencilere eğimin ne olduğu ile ilgili düşüncelerini almıştır. Buna göre Bartu “dikey bölü yatay” şeklinde cevap verirken, Ali de “dikey uzunluğu bölü yatay uzunluğu” cevabını vermiştir. Oğuz ise eğimin trigonometrik yorumunu yapmış ve “tanjant 30 veya 60 olması lazım” diye cevap vermiştir. Melike, $y=mx+n$ denkleminde, x 'in katsayısının eğimi vermesi bilgisinden yola çıkarak “ m ” cevabını vermiştir. Gül, eğimin geometrik yorumundan yola çıkarak “hipotenüs” cevabını verirken, Koray da eğimin günlük hayattan örneğini vererek “merdivenin eğimi” cevabını vermiştir. Eğimin; geometrik yorumu, analitik geometrideki anlamı gibi farklı yorumlarından bahsedilmektedir. Eğimin, matematiğin farklı alanlarındaki yorumu ile bahsedilen şey aynı olsa da öğrenciler bu ilişkilendirmeyi yapmakta sorunlar yaşayabilmektedirler (Cheng, 2010).

On üçüncü görevde, verilen şekillerin eğimlerinin incelenmesi istenmiştir. İlk doğrunun eğimi ile ilgili olarak;

Oğuz: $-1/2$

A: Neden $-1/2$?

Oğuz: Çünkü grafikte 0'dan 2'ye çıkmış ama x ekseninde 0'dan -4 'e gidiş yapmış. Yani negatif yöne gitmiş.

Bartu: Bence de $-1/2$. bu doğru apsisin eksisinden geçmiş. Negatif olduğu için eğim eksi olur.

Oğuz, grafikteki değişimin orijinden y ekseninde $+2$ noktasına ve x ekseninde -4 noktasına doğru gerçekleştiğini düşünmüştür. Benzer şekilde Bartu da doğrunun, x değerlerinin negatif olduğu ikinci bölgeden geçmesi nedeniyle, eğimin negatif olacağını düşünmüştür.

Melike: (doğru) Sağa yatık olduğu için pozitifdir.

A: Doğru sağa yatık olunca neden pozitif olur?

Ezgi: (doğru) Sola yatık olunca pozitif olur bence. Bu doğru da sola yatık zaten.

Melike: (elini düz bir doğru gibi kullanarak) Bak, böyleyken sağa doğru yatmış, böyle olmuş (elini sağa eğilmiş bir doğru gibi kullanarak). O yüzden sağa yatık.

Doğrunun eğimi ile ilgili olarak ders kitaplarında sıkça geçtiği için nedenini sorgulamadan ezberledikleri ‘doğru sağa yatıksa eğimi pozitif, sola yatıksa negatiftir’ kuralında, öğrenciler ‘sağa yatık, sola yatık’ ifadelerini anlamlandırmada bile zorluk yaşamaktadırlar. Nitekim Ezgi, doğrunun x eksenini altında kalan kısmının sola doğru daha eğimli olmasından yola çıkarak, doğrunun sola yatık olduğu şeklinde yorum yapmıştır.

Melike: Bence pozitif çünkü eksiye doğru gitmiş ama biz uzunluğu ölçüyoruz. Uzunluk eksi olamaz, o yüzden pozitif.

A: O zaman hiçbir doğrunun eğimi negatif olamaz. Ama biz eğimi negatif olan doğrulardan bahsediyoruz. Nasıl oluyor bu?

Melike: Kitabımızda da bu şekilde geçiyor, y ’deki uzunluğun x ’deki uzunluğa oranı.

Melike, doğrunun eğimi ile ilgili olarak “dikeydeki uzunluğun yataydaki uzunluğa oranı” bilgisini, otorite ile ilişkilendirmiş ve uzunluk negatif olamayacağından ayrıntıları uzaklaştırarak genişletme yapmıştır. Melike’nin bu yorumu ile öğrencilerin, eğimin “dikeydeki uzunluğun yataydaki uzunluğa oranı” olan yorumunu daha çok kullandıkları görülmektedir. Oysa bu yorumunun yanında, birbirine göre değişen niceliklerin oranı olarak verilmesi, eğimin farklı alanlardaki yorumlarının birbiriyle ilişkilendirilmesini sağlayacaktır.

Araştırmacı, öğrencilerin, eğimin analitik geometrideki anlamına odaklanmaları için şu soruyu sormuştur;

A: Eğimin çeşitli boyutlarından bahsettik. Eğimin koordinat sistemi üzerindeki anlamını düşünelim. Koordinat sistemi üzerinde ne görüyorsunuz?

Koray: x ve y .

A: Bu x ve y değerleri birbirlerine göre değişim halinde. Bunu aklınızda tutarak eğimin tanımı hakkında düşünün.

...

A: Bakın, x eksenindeki ve y eksenindeki değişimi inceliyoruz. Bu iki değişimin oranını inceliyoruz. O halde oranın negatif olacağı ve pozitif olacağı durumları düşünün.

Elif: Değişim derken ne demek istiyoruz?

A: Yani A noktasından B noktasına gelebilmek için A noktasından çıkıyorsunuz ya kaç birim sağa ve kaç birim yukarı çıkınca B noktasında geliyorsunuz, bundan bahsediyorum.

Ali: 4 birim sağa ve 2 birim yukarı.

A: Peki x eksenini ve y eksenini üzerindeki değişimlerin negatif mi oldu pozitif mi?

Ali: -4'ten 0'a geldik ve 0'dan 2'ye çıktık. İkisi de pozitif oldu.

Oğuz: O yüzden de eğim pozitif oldu, pozitif bölü pozitiften.

Bartu: O zaman (değişimlerden) biri eksi olursa da (doğru) sola yatırsa eğimi eksi olur.

Burada, bir doğru üzerindeki bir noktadan diğerine gitmek için x ve y eksenleri üzerinde nasıl hareket etmek gerektiğinden yola çıkarak, öğrencilerin x ve y eksenlerinde meydana gelen değişim hakkında düşünceleri sağlanmıştır. Böylece öğrenciler “doğru sağa yatırsa eğim pozitif, sola yatırsa negatiftir” kuralının, eksenlerdeki niceliklerde meydana gelen değişimle ilgili olduğunu fark etmişlerdir. Öğrenciler, eksenlerde meydana gelen pozitif yönlü değişimden yola çıkarak uygulanabilirlik alanını genişletmişler ve sonrasında buldukları kuralı devam ettirerek genişletmişlerdir. Böylece doğru sola yatırsa, eğiminin negatif olacağı bilgisine ulaşmışlardır.

A: A noktasından B noktasına giderken ve B noktasından C noktasına giderken eğimi aynı bulduk. Bu ne anlama geliyor?

Elif: Eğim değişmiyor. Bir doğru üzerindeki eğim aynıdır.

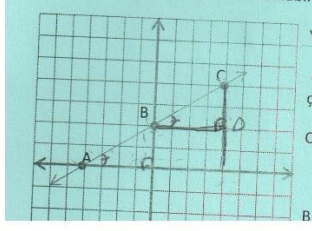
A: Doğru üzerinde eğim değişmez. Neden?

Ali: Doğru dümdüz gider çünkü.

Oğuz: Paralel çizgiler çizsek, trigonometrik oranlarına baksak.

A: Nereden çizgiler çizsek?

Oğuz: Az önce eğimi bulurken AOB üçgeni oluşturduk ya aynı şekilde x eksenine paralel çizip BCD dik üçgeni oluşturursak, o nokta da D olsun mesela. O zaman bu ikisi birbirine eş üçgenler olmaz mı? O zaman BAO açısı ile CBD açısı aynı olur. O zaman tanjantları da yani eğimleri de aynı olur.



Şekil 16. Ali'nin çalışma kâğıdı

Oğuz, bir önceki soruyla ilişkilendirme yapmış ve x eksenine paralel çizerek BCD dik üçgenini oluşturmuştur. Oluşan BCD üçgeni ile AOB üçgeninin eş olmasından yola çıkarak, eş üçgenlerin özelliği ile ilişkilendirmiş ve ayrıntıları uzaklaştırarak genişletme yapmıştır. Böylece, doğru boyunca eğimin değişmeyeceği bilgisini elde etmişlerdir.

A: Doğru sağa yatık olunca eğim neden pozitif oluyordu, kim söyleyecek?

Melike: Çünkü sağa giderken sayılar büyüyor yani x'teki ve y'deki değişimler pozitif oluyor.

A: Peki sola yatık olunca?

Koray: Sola yatık olunca da eğim eksi çünkü değişimlerden biri negatif oluyor.

A: Bakın hep değişimler üzerinden konuşuyoruz. Başta dediniz ki eğim dikey uzunluğun yatay uzunluğa oranıdır. O zaman eğim tanımını konuştuğumuz şeyler üzerinden düzenleyerek vermek isteyen var mı?

...

Ali: O zaman eğim değişimlerin oranı oluyor. y eksenindeki değişimin x eksenindeki değişime oranı.

Böylece öğrenciler, niceliklerin değişimini hakkında muhakeme ederek eğimin tanımına ulaşmışlardır. Doğrunun sağa ve sola yatık olmasının, eksenlerde meydana getirdiği değişimlerden yola çıkan öğrenciler, ayrıntıları uzaklaştırarak genişletme yapmışlar ve eğimin tanımına ulaşmışlardır.

A: Değişken nedir?

Gül: Değişen şeyler.

Melike: Ayrılmaz ikili, x ve y.

A: ...Mesela sizin TEOG sınavındaki başarınız nelerden etkilenir? (öğrencilerden her biri cevap verir) motivasyon, kaç saat ders çalıştığınız, heyecan, sınav psikolojisi, uyku uyuyup

uyuyamamanız, yolda sınava gelirken düşmeniz gibi. Sizin sınavdaki başarınız bu değişkenlerin her birinden etkilenir. Çok ders çalışırsanız, puanınız yükselebilir; gece uyuyamadıysanız, puanınız düşebilir; motivasyonunuz düşükse puanınız düşebilir gibi. Dolayısıyla Teog sınavındaki başarınız bu değişkenlerin aldığı değere göre değişebileceğinden bağımlı değişken, diğer değişkenler de bağımsız değişkenlerdir.

Araştırmacı, x ve y eksenlerinde meydana gelen değişimler hakkında öğrencilerin dikkatini çektikten sonra, değişkenin ne olduğunu tekrardan sormuştur. Değişkenler konusuna bu şekilde giriş yaptıktan sonra araştırmacı, şekillerin sayıları ile çevre uzunlukları arasındaki ilişkinin araştırıldığı görevde (Görev 15), şekil sayılarını ve çevre uzunluklarını grafikte noktalar halinde göstermiştir.

A: Grafikte hangi ilişkileri görüyorsunuz?

Sezen: Hepsinin eğimi var.

Oğuz: Üçgenin eğimi daha fazla gibi gördüm ama.

A: (üçgene, kareye, beşgene ait noktaları kesikli çizgi ile birleştirerek) bu üç doğruya bakarsanız, hangisinin eğimi daha fazladır?

Melike: Mesela bu doğruların x eksenine yaptığı açılara baksak, beşgenin oluşturduğu açı daha fazla, o yüzden eğimi azdır.

A: x eksenine oluşturduğu açı büyük olunca, eğimi küçük mü oluyor?

Melike: Evet.

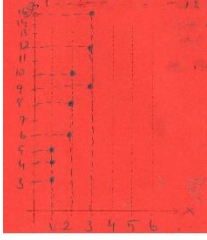
Melike ve Oğuz, doğruların eğimini trigonometri bilgileriyle ilişkilendirerek, x eksenine yaptığı açı büyük olan doğrunun eğiminin küçük olacağını ifade etmişlerdir. Bu soruda da beşgene ait doğrunun x eksenine yaptığı açı daha büyük olduğundan, ayrıntıları uzaklaştırarak genişletmişler ve doğrunun eğiminin daha küçük olduğunu ifade etmişlerdir. Oysa grafiği dikkatlice inceleseler bile, beşgene ait doğrunun eğiminin daha büyük olduğunu görebilirlerdi. Sonrasında ise devam ettirerek genişletmişler ve üçgene ait doğrunun, x eksenine yaptığı açı daha küçük olduğundan, eğiminin de daha büyük olduğunu ifade etmişlerdir.

Sezen: Mesela 3 beşgenin çevresi(nin uzunluğu) 15, $15/3=5$. 3 karenin çevresi(nin uzunluğu) 12, $12/3=4$. 3 üçgenin çevresi(nin uzunluğu) 9, $9/3=3$. O zaman beşgenin eğimi 5, kareninki 4, üçgeninki 3 oluyor. Aa, beşgenin 5 kenarı var, eğimi de 5. Aynı şekilde karenin 4 kenarı var, eğimi de 4. Üçgen için de aynısı geçerli. Tesadüf mü oldu?

Ali: Tesadüf değil bence. Hepsinin kenarı aynı uzunlukta olduğundan öyle oldu bence.

...

Elif: Üç şekil üzerinden düşünersek eğer, hepsinde bölü 3'ler aynı oluyor. O zaman y'si daha çok olanın eğimi daha fazladır. Beşgenin y'si daha çok olduğu için eğimi de daha fazladır.



Şekil 17. Sezen'in çalışma kâğıdı

Sezen, eğimin tanımından yola çıkarak her bir çokgene ait doğrunun eğimini bularak işe başlamıştır. Buna göre, kenarları 1 br olan 3 tane beşgenin çevresinin uzunluğu 15 br olduğundan, y eksenindeki değişim 15 br olmaktadır. Aynı şekilde, x eksenindeki değişim de 3 br olmaktadır. Bu iki değer birbirine oranı olan 5 de doğrunun eğimini vermektedir. Bu işlemi her doğru için tekrarlamış ve işlem yaparak devam ettirmiştir. Elif ise doğruların eğimini bulmak için, x eksenindeki değişimin her doğru için 3 olduğu noktayı alarak payda değerini sabit almıştır. Bu durumda payı büyük olanın, eğimi de büyük olacağı yorumunu yaparak, ayrıntıları uzaklaştırarak genişletmiştir. Ayrıca Sezen, çokgenlerin eğimlerini kenar sayılarıyla ilişkilendirerek benzer örüntü araştırmıştır. Bunun üzerine Ali, tüm çokgenlerin kenar uzunluklarının eşit ve 1 br olmasından yola çıkarak, ayrıntıları uzaklaştırarak genişletme yapmıştır.

Çevre uzunluğu 18 br olan dikdörtgenin kenarlarının uzunluklarının alabileceği olası değerler ile ilgili olarak (Görev 16), öğrenciler sayı çiftlerini denemişlerdir. Bunun sonucunda olası kenar uzunluklarını (1,8), (2,7), (3,6), (4,5) olarak bulmuşlardır. Ali, bu sonucu bir adım öteye götürerek kenar uzunlukları arasında benzer ilişkiyi araştırmış ve uygulanabilirlik alanını genişletmiştir: “Dikdörtgenin çevresi 18 birim ise, kısa kenarla uzun kenarın toplamı 9 birimdir. Toplamı 9 olan tam sayılar olur. 1'e 8, 2'ye 7, 3'e 6, 4'e 5 gibi.”

Kısa ve uzun kenarlar arasındaki ilişkiyi grafikte gösterme sorusunda Bartu, kısa ve uzun kenarları eksenler üzerinde işaretlemiş, bu noktaları x ve y eksenlerine dik çizgilerle

birleştirmiştir. Elif de gösterimini bu şekilde yapmış ve grafiğin yanına “merdiven gibi oldu” diye not düşmüştür. Bartu’ya bu noktaları neden çizgilerle gösterdiği sorulduğunda, “x ve y eksenin olan uzaklıklarını göstermek için” bu şekilde yaptığını belirtmiştir. Bu noktaların bir doğru ile birleştirilip birleştirilmeyeceği ile ilgili olarak;

Ali: Olur çünkü hepsi (bütün noktalar) aynı doğru.

Bartu: Ama doğru olmaz, doğru parçası olur. 9’a 0 (9,0) olmaz mesela.

A: Peki bu noktaları birleştirip doğru parçası olarak çizdiğinizde mesela şu nokta (kalemle 2 ile 3’ün arasını göstererek) sizin doğrunuzu sağlar mı?

Bartu: Sağlar, 2,5’a 6,5 eder. $9+9=18$ eder. Sağlar yani. Ama doğru parçası olacak. Uzunluk 0 ya da eksi olamaz çünkü.

A: O noktanın 2,5 olduğunu nereden biliyorum, belki 2,7?

Bartu: O zaman öbürü de 6,3 olur.

A: Peki nerede bitireceğiz o doğruyu, nerede sonlandıracağız?

Oğuz: 9 deriz (kalemiyle grafiğindeki 9 noktasını gösteriyor) hani eşitsizlik grafiklerinde yapıyorduk ya yuvarlak içine alıyorduk.

A: Nasıl yapıyorduk?

Oğuz: 9’u alıyorduk, 9 yoksa yuvarlak içine alıyorduk, 9 varsa yuvarlağı boyuyorduk ya.

Bartu: Dâhil veya dâhil olmama durumuna göre.

A: Doğru parçasının uçlarını nasıl göstereceğiz?

Koray: O zaman burada ((0,9) noktasının hemen önü) bitiririz. Çünkü arkadaşların dediği gibi uzunluk 0 olamayacağından, keseriz doğruyu bu noktada ((0,9) noktasını göstererek).

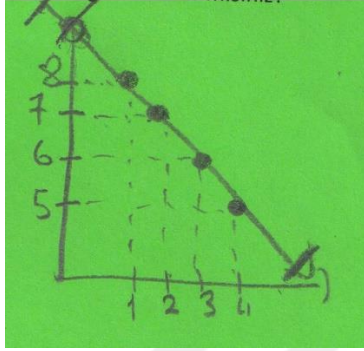
Ali: Bence şu noktaya (y eksenindeki 9 noktasını göstererek) değmeden hemen önce bitebilir. Çünkü şu nokta (y eksenindeki 9 noktasının önü) 0,1’e 8,9 olabilir. Toplamı da 9 olur.

A: Peki o bitirdiğin noktanın yanındaki nokta sağlıyorsa, ne yapacağız?

Ali: Bilemeyiz ki onu, sonsuza kadar gidebilir.

Öğrenciler, kenar uzunluklarının 0 ya da negatif olamayacağını düşünerek, aralarındaki ilişkinin doğru parçası şeklinde gösterilebileceğini ifade etmişlerdir. Bu ayrıntıyı düşünmelerinin olumlu bir durum olduğu düşünülmektedir. Doğru parçasının nerede

biteceği sorulduğunda, Oğuz eşitsizlik konusu ile ilişkilendirme yapmıştır. Ali ise “y eksenindeki 9 noktasının hemen önü” olarak ifade ettiği nokta ile (0,9) noktası arasında sonsuz nokta olacağını düşünememiş, (0,9) noktasına değmeden doğruyu bitirmek gerektiğini ifade etmiştir. Öğrenciler, noktaları bir doğru ile birleştirdiklerinde eksenler üzerindeki her x değerine karşılık her y değeri için doğrunun sağlanacağını ifade etmişlerdir. Az önce kenar uzunluklarının sadece tam sayı değerleri alabileceğini düşünen öğrenciler böylece, ondalık sayı değerlerini de dâhil edebileceklerini ifade etmişlerdir. Dolayısıyla devam ettirerek genişletmişlerdir. Koray da benzer şekilde doğruyu (0,9) noktasının hemen önünde bitirmek gerektiğini “doğruyu kesmek” olarak ifade etmiş ve şu şekilde göstermiştir;



Şekil 18. Koray’ın çalışma kâğıdı

Koray’ın çalışma kâğıdında eksenlerdeki noktaları eksik gösterdiği görülmektedir. Koray, x eksenine 1, 2, 3, 4 noktalarını; y eksenine de 5, 6, 7, 8 noktalarını göstermektedir. Bunun sebebi sorulduğunda, dikdörtgenin olası kenar uzunluklarını (1,8), (2,7), (3,6), (4,5) noktaları halinde gösterdiklerinden, bu noktaların x bileşenlerini x eksenine, y bileşenlerini ise y eksenine gösterdiğini belirtmiştir. Her ne kadar bu noktaları aynı doğru üzerinde birleştirerek tüm noktaların bu doğruyu sağlayacağını ifade etse de grafik çizerken tam sayı değeri dışındaki değerleri ihmal ettiği görülmektedir.

Noktaların bir doğru şeklinde birleştirilip birleştirilemeyeceğine ilişkin olarak ise;

Elif: Birleştiremeyiz. Oranları aynı olmuyor. 8’e 1, 7’ye 2 bunların oranları aynı değil ama aynı doğru üzerinde olacaklarsa eğimleri aynı olmalıydı. Burada A noktasının eğimi 8 olur, B noktasınıninki de 7/2.

A: Eğim neydi?

olabileceğini ifade etmişlerdir. Oysa eğimin diğer boyutu olan “y eksenindeki değişimin x eksenindeki değişime oranı” bilgisine sahip olsalardı, noktanın eksenler üzerinde bir değişim meydana getirmeyeceğini muhakeme edebilirlerdi. Ali ise ABD dik üçgenini dikkate alarak ABD açısının tanjantının eğimi vereceği bilgisiyle ilişkilendirmiştir. Böylece, ABD açısının karşı dik kenarını, komşu dik kenara oranlayarak eğimi bulmuştur.

A: BC doğru parçasının eğimi ne olur?

Elif: $(7 - 6)/(3 - 2) = 1$ olur. O zaman eğimleri aynı olur. Doğru şeklinde çizebiliriz.

Elif, az önce Ali’nin [AB]’nin eğimi hakkında ifade ettiği kuralı devam ettirerek genişletmiştir. [BC] hipotenüs olacak şekilde bir dik üçgen çizmiş ve karşı dik kenarın komşu dik kenara oranını alarak eğimi doğru bir şekilde ifade etmiştir.

A: Bu noktaları doğru halinde birleştirebilmek için eğimlerin aynı olması yeterli değildir. Bu noktaları doğru şeklinde birleştirebilmek için doğru üzerindeki her noktanın sizin kuralınızı sağlayıp sağlamadığını incelemeniz gerekir. Bu doğrunun her noktası, kısa ve uzun kenarları toplamı 9 birim olan dikdörtgenin kenarları arasındaki ilişkiyi gösterir mi? Bunları düşünmeniz lazım.

...

A: Kısa ve uzun kenarla ilgili 4 ihtimal yazdınız. Bunlar tam sayı değerleri. Peki, çevresi 18 birim olan bir dikdörtgenin kenarlarının alabileceği değerler sadece bunlar mıdır?

Ali: 1,5’a 7,5 da olabilir mesela.

A: Evet, tamsayı olmayan değerler de sizin kuralınızı sağlar.

Bartu: 2,1’e 6,9 da sağlayabilir. O zaman o doğru üzerindeki her noktanın (x ve y bileşenlerinin sayı değerinin) toplamı 9 olur.

Öğrenciler, sadece tam sayı değerlerini değil ondalık sayıları da hesaba katarak doğru üzerindeki her noktanın kuralı sağlayacağını ifade etmişlerdir. Böylece uygulanabilirlik alanını genişletmişlerdir. Kenar uzunluğu 0 olamayacağından, doğrunun eksenleri kestiği noktada x ve y değerlerinden birinin 0 olması sebebiyle, belirtilen noktaların dâhil edilmemesi gerektiğini düşünerek benzer sonucu araştırmışlardır. Dolayısıyla Oğuz, bu noktalar doğruyu sağlamayacağından eksenleri kestiği noktayı açık aralığa almıştır.

Bir sonraki gün, eğimin 0 olması durumu ya da eğimin olmaması durumu üzerinde sınıfça tartışılmıştır. Oğuz, eğimin 0 olduğu durumlar olabileceğini belirtmiş ve fikrini “Eğim

düşey bölü yatay diyoruz ya, düşeyi eğer 0 ise yani x eksenini üzerindeyse koordinat sisteminde, eğimi 0 olur” şeklinde ifade etmiştir.

A: Peki bir örnek verir misin?

Oğuz: Koordinat sistemi, mesela şurada var ya (tahtadaki bir önceki sorudan kalan çözümü göstererek) orada diyelim ki, $(-1,0)$ ve $(5,0)$ noktalarından birer doğru geçse, oranın eğimi 0 olur. Çünkü x’in üzerindedir bu doğrular.

A: Günlük hayattan örnek verir misin?

Oğuz: Imm, düşeyi 0, ... direk x’in üzerinde.

Oğuz, eğimin 0 olması durumunu doğru ifade etmiştir; y eksenindeki değişim 0 olursa, eğim 0 olur. Fakat bunu yanlış örneklendirmiştir. Eğimi, hâlâ “y’nin x’e oranı” olarak aldığından örneğin; $(-1,0)$ noktasından geçecek herhangi bir doğrunun eğiminin 0 olacağını belirtmiştir. Çünkü $(-1,0)$ noktasının x değeri -1 ve y değeri 0 olduğundan, $0/-1 = 0$ değerini vermektedir. Dolayısıyla $(-1,0)$ noktasından geçecek herhangi bir doğrunun eğimi de 0 olacaktır. Her ne kadar matematiksel olarak yanlış olsa da, bu Oğuz’un kendi matematiği olduğundan, eylemi devam ettirerek genişletme kategorisinde düşünülebilir. Ayrıca verdiği örnek, yani “doğru x ekseninin üzerindeyse, eğiminin 0 olması” da yanlış bir örnektir. Doğru x eksenini üzerindeyse yani y eksenine paralelse, bu eksen kestiği nokta olmayacağından, y eksenindeki değişimin 0 olacağını düşünmüştür. Zira Oğuz, ev ödevinde de eğimin 0 olacağı durumlar için “Doğrunun eğimi 0 olabilir. Bu doğruların koordinat düzlemindeki yeri apsisi üzerindeyse yani sıralı ikili olarak yazdığımızda $(x,0)$ oluyor ise eğim 0 olur.” ifadelerini kullanmıştır. Bu örnekte öğrencilerin, eğimi ‘dikey bölü yatay’ olarak görme alışkanlıklarını devam ettirdikleri görülmektedir.

Ali: Eğim 0 olur hocam. Yataya ya da dikeye paralelse eğim 0 olur.

A: Yataya ya da dikeye mi paralelse?

Ali: Evet.

A: İki durumda da olur mu?

Ali: Evet.

Koray: Mesela yolda yürürken dümdüz bir yol olduğunda, hiç diklik olmadığında eğim 0 olur. O yüzden daha çok yürürüz.

Bartu: Yokuş aşağı daha rahat yürürüz o zaman.

Eğimi, ‘dikey bölü yatay’ olarak düşünme alışkanlığını devam ettiren Ali, benzer bir yaklaşımla ordinat ya da apsisin 0 olduğu durumlarda eğimin 0 olacağını ifade etmiştir. Koray ise eğimin 0 olması durumunu yeni bir durum oluşturarak ilişkilendirmiş ve düz bir yolun eğiminin 0 olacağını belirtmiştir.

A: Mesela yürüyüşe çıktığınızı düşünelim. 5 dakika boyunca 3 birim hızla yürüdünüz. Sizin hız-zaman grafiğiniz neye benzer? Bakın x ekseniniz zaman, y ekseniniz hızınızı ifade ediyor. 1. dakikada, 2. dakikada, 5. dakikada hep 3 birim sabit hızla yürüyorsunuz. Düşünün bu grafiği.

...

Melike: y ekseninde hızım 3 olduğuna göre 1, 2, 3, 4, 5. dakikaların hepsi boyunca hızım 3 olacak yani x eksenine paralel bir doğru boyunca hareket ederim.

A: Evet (grafiğin 5 dakikalık kısmını tahtaya çizer). Peki bu doğrunun eğimi ne olur?

Gül: y de hiç değişim yok ama x hep artmış. Yani üst taraf 0 oluyor (eğim formülünün payı). O zaman eğim de mi 0 oluyor?

...

Bartu: Doğru x eksenine paralelse eğimi 0 olur.

...

Oğuz: y ekseninde değişim olmayınca eğim 0 olur.

Verilen örnek üzerine düşünen öğrenciler, havaya parmaklarıyla grafik çizmişler ve grafiği zihinlerinde canlandırmaya çalışmışlardır. İlk 5 dakika boyunca hız değişmediğinden, x eksenindeki 1, 2, 3, 4, 5 noktaları ile y değerinin 3 olduğu noktaları, bir doğru boyunca birleştirmişlerdir. Daha sonra 1’den 5’e kadar olan zaman değerleri için de hızın 3 olduğunu fark etmişlerdir. Bunun üzerine devam ettirerek genişletmişler ve bu noktaları, $y=3$ doğrusu boyunca birleştirmişlerdir. Daha sonra bu doğru boyunca y ekseninde bir değişim meydana gelmediğinden, eğimin 0 olacağını fark etmişlerdir. Bartu ve Oğuz, uygulanabilirlik alanını genişleterek, doğru x eksenine paralel olduğunda, eğiminin 0 olacağını ifade etmişlerdir. Öğrencilerin çoğu, eğimin 0 olmasını eğimin olmaması olarak yorumlamışlardır.

A: Peki řu durumu dűřűnelim; alınan yol-zaman grafiđi dűřűnűn. Zaman sabit, deđiřmiyor ama aldığımız yol sűrekli artıyor. Mesela 3. saniyede alınan yolun sűrekli arttığını dűřűnűn. Bu olabilir mi?

Ođuz: Olamaz. Ćűnkű zaman durmaz. Yani 3. saniyede aldığım yol 5, 6, 7 metre diye artamaz. Sonuĉta aynı saniyede hem burada hem orada olamam.

Őđrenciler, bu őrnekte zaman sabitken alınan yolun artmayacađı űzerinde hem fikir olmuřlardır. Ancak x ekseninde deđiřim yokken, y ekseninde bir deđiřimden sűz edilemeyeceđini, grafik űzerinde gűstermekte sorun yařamıřlardır. Bunun űzerine bir őrnceki őrnekte yapıldığı űzere, sabit bir x noktası alıp, y deđerleri ile birleřtirerek bir dođru elde etmiřlerdir. Bűylece benzer őrűntű arařtırmıřlardır. Sonrasında bađlamsal olarak bűyle bir durum olamayacađından uygulanabilirlik alanını geniřleterek, eđimden bahsedilemeyeceđini ifade etmiřlerdir.

Eđimin farklı anlamları, eđimin 0 olduđu ya da eđimin olmadığı durumlar űzerinde tartıřılarak deđiřimlerin analizine bűylece bir giriř yapılmıřtır. Sonrasında őrđrenciler, mumun uzunluđunun zamana gűre deđiřimini inceleyen gűrev 17 űzerinde ĉalıřmaya bařlamıřlardır.

A: Tabloda ne gibi őrűntűler gűrdűnűz?

Gűl: Dakika arttıkĉa boy kısalımıř, mum erimiř.

Bartu: Mum yakıldıđında 20 cm imiř, 1 dakika sonra 18 cm kalmıř, 2 cm erimiř. 2 dakika sonra 16 cm kalmıř, yine 2 cm erimiř. Bu hep bűyle olmuř. Tablodaki x ve y sűtűnlarındaki sayılar bize bunu sűylűyor.

Oğuz: 3. dakika ile 3,5. dakika arasında mum 1 cm erimiş. Yarım dakikada 1 cm eriyorsa, 1 dakikada 2 cm erir. Orda da bu kural var yani.

Őđrenciler, tablodaki zaman sűtűnundaki ve boy sűtűnundaki deđerleri ayrı ayrı ve birlikte analiz etmiřlerdir. Buna gűre mumun, yarım dakikada 1 cm, bir dakikada 2 cm eridiđini ifade etmiřlerdir.

A: Peki geĉen zaman ile mumun boyu arasında bir kural bulabilir misiniz?

Oğuz: $(2n - 4)/2$. n yerine 20 koyunca, 18 ĉıkıyor.

A: n dediğin ne?

Oğuz: Imm, ..., pardon karıştırdım, boy ve zaman arasında bir kural olacaktı, ben sadece boyu buldum.

Oğuz, boy sütunundaki sayıları düşünerek aslında $n-2$ kuralını bulmuştur. n yerine 20 koyduğunda da bir sonraki sayı olan 18'i elde etmiştir. Öğretim deneyinde uygulanan önceki görevlerde, bir tabloda aranması gereken ilişkilerden bahsedilmiştir. Bir tabloda, x değerleri arasındaki, y değerleri arasındaki, x ve y değerleri arasındaki ilişkileri analiz etmek gerekmektedir. Buna rağmen Oğuz, bir tek boyutu kendi içinde incelemiştir. Ancak matematik derslerinde kural bulmak için genellikle bu şekilde işlem yaptıkları düşünüldüğünde, bu durum normal karşılanabilir.

Mumun kaç dakika sonra tükeneceği ile ilgili olarak, öğrenciler tablodaki değerleri mumun dakikada 2 cm kısılmasına göre devam ettirerek genişletmiştir.

Zaman (dk)	Boy (cm)
0	20
1	18
2	16
3	14
3,5	13
4,5	11
6	8

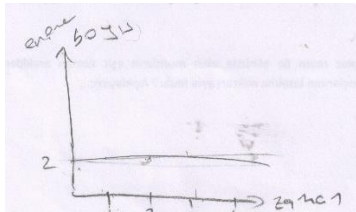
Buna göre;

1. Tabloda hangi örüntüleri fark ettiniz? Örneğin nasıl bir ilişki vardır, mumun yakılmadan önce...

1 dk'da 2 cm azalmış.
yarım dk'da 1 cm azalmış.
1,5 dk'da 3 cm azalmış.

Şekil 20. Sezen'in çalışma kâğıdı

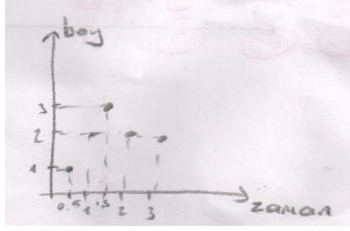
Ali ise zamana bağlı mumun boyuna dair bulduğu kuralı 0'a eşitlemiştir. Böylece işlem yaparak genişletmiştir. Mumun boyunun geçen zamana göre grafiğinin çizilmesi sorusunda Gül, arkadaşlarından farklı düşünerek zamana göre erime miktarının grafiğini çizmiştir.



Şekil 21. Gül'ün çalışma kâğıdı

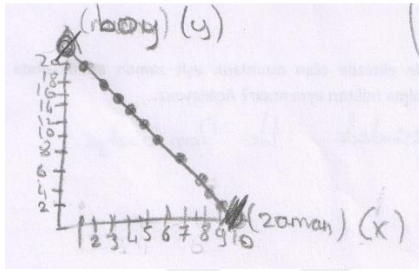
Gül'ün çizdiği bu grafiğin yanlış olduğunu belirten Sezen, bu durumu “sabit 2 cm eriyor seninkinde. Hepsinde 2 cm erimiyor ki. İlk üç dakika 2 cm erimiş. Ama sonra yarım dakikada 1 cm erimiş. 1.5 dakikada 3 cm erimiş.” şeklinde ifade etmiştir. Sezen, Gül'ün

çizdiği grafikte mumun boyunun her dakika 2 cm eridiği bilgisini görememiş ve şu grafiği çizmiştir;



Şekil 22. Sezen'in grafiği

Sezen, tabloda bulduğu zaman ve boy değerlerinin arasındaki ilişkileri grafik üzerinde işaretleyerek nokta grafik olarak göstermiştir. Bu durum Sezen'in, verilen sözel ifadeyi grafiğe döküp anlamlandırmada sorun yaşadığı şeklinde yorumlanabilir.



Şekil 23. Koray'ın çalışma kâğıdı

Koray: Böyle çizdim ben, bitiş noktalarını da daire içine aldım çünkü yaptığımız gibi. Çünkü buralarda bitiyor artık, 0 oluyor boyu. 10. dakikada boyu bittiği için, daha da yanmaya devam edemeyeceği için, bunu göstermek için daire içine aldım ve orada kestim doğruyu.

Koray, bir önceki soruyla ilişkilendirerek grafiğini çizmiştir. Mum bittikten sonra daha yanamayacağı için doğrunun bitiş noktalarını daire içine almış, kendi deyimiyle “keserek” o noktaları dâhil etmemiştir. Ancak bu soru, bir önceki sorudan farklıdır. Bu soruda eksenler üzerindeki (10,0) ve (0,20) noktaları da doğruya dâhil edilmelidir. Çünkü 0. saniyede mumun boyu 20 cm, 10. saniyede ise 0 cm olmaktadır. Bir önceki soruyla benzer prosedür araştırarak grafiğini o şekilde çizen Koray, böyle yaparak 10. dakikada mumun boyunun 0 cm olacağı bilgisini grafikte göstermemiştir.

A: Sizce bu noktaları bir doğru üzerinde birleştirebilir miyiz?

Gül: Tabi ki. Hepsi aynı şekilde azalmış. (eliyle havada azalan bir doğru çiziyor)

Ali: Hayır birleştiremeyiz. Çünkü boy eksiye düşemez ki sadece 0'a kadar gelebilir.

Oğuz: Olmaz hocam, doğru sonsuza kadar gider. Ancak doğru parçası olur. Doğru parçası çizer orada keseriz.

Gül: Dünkü soruda da yapmıştık, bunun eğimi her yerde 2 olduğundan bu noktaları birleştirebiliriz.

Koray: Mesela dünkü soruda yarım çevre olmaz demiştik (çokgenlerin çevrelerini grafikte gösterme sorusundan bahsediyor) ama burada yarım dakika da olur. Çeyrek dakika da olur. Yani bu doğru üzerindeki her nokta kuralımızı sağlar.

Koray ve Oğuz, doğrunun bittiği noktaları “doğruyu kesmek” olarak ifade etmekte, bunu da grafikte doğrunun bittiği noktalara çizgiler çekerek göstermektedirler. Öğrenciler, benzer bir soruyla geri ilişkilendirme yaparak noktaların bir doğru ile birleştirildiğinde doğru boyunca bütün x değerleri için, y değerlerinin kuralı sağlayacağını ifade etmişlerdir. Ayrıca Gül, “hepsi aynı şekilde azalmış” ifadesiyle noktaların doğrusal olduğunu, dolayısıyla eğim aynı olduğundan, noktaların bir doğru boyunca birleştirilebileceğini belirtmiştir. Öğrenciler, doğrunun sonsuza gittiği bilgisinden hareketle mumun boyunun negatif olamayacağından, doğru parçası olarak göstermek gerektiğini ifade etmişlerdir.

A: Boyu 30 cm olan ve yakıldığında eşit zaman aralıklarında az önceki mum ile eşit miktarda yanan mumun boyunun zamana göre grafiğini çizdiğiniz düşünün. Grafiği çizmeden eğim hakkında ne söyleyebilirsiniz?

...

Ali: 2. Çünkü dikey (y sütunu) 30, yatay (yanma süresi) 15 olduğundan $30/15=2$ eder.

...

Oğuz: Grafikte bağımlı-bağımsız dedik ya, bağımlımız y boy, bağımsızımız x zaman. Az öncekiyle aynı grafik zaten. 2 azalıyor y , zaman da 1 artıyor. Yani $2/1$ olduğundan eğim 2 olur.

Ali, zihninde doğrunun grafiğini çizerek eksenleri kestiği noktaların $(0,30)$ ve $(15,0)$ olduğunu bulmuştur. x eksenini kestiği noktanın $(15,0)$ olduğu bilgisini, aslında eşit zaman aralıklarında eşit miktarda yanan mum dendiği için, zihninden $30/2$ işlemi ile elde etmiştir. Yani 30 cm’lik mumun, birim zamanda 2 cm eridiğini kabul ederek mumun boyunu zamana bölerek, mumun birim zamanda 2 cm eridiğini tekrar bulmuştur. Böylece, işlem yaparak genişletmiş ve eğimi bulmuştur. Eşit zaman aralıklarında eşit miktarda kısalmadan bahsedildiği için Oğuz, yeni mumun grafiği için de y eksenindeki değişimin 2 br ve x

eksenindeki değişimin 1 br olmasından yola çıkarak bu değerleri birbirine oranlamıştır. Böylece, devam ettirerek genişletmiş ve sonucu bulmuştur.

Feyza'nın eve olan uzaklığının zamana göre değişimini veren tablo ile ilgili olarak (Görev 18) öğrenciler, tablodaki ilişkiler üzerine çalışmaya başlamışlardır. Sütunlardaki sayılar karışık bir sırada verildiğinden, sayıları sıraya dizerlerse işlerinin daha kolay olacağını düşünmüşlerdir.

A: Zaman geçtikçe eve olan uzaklığı artıyor dediniz. Birim zamanda Elif'in aldığı yol için ne söyleyebilirsiniz?

...

Bartu: Bir saniyede aldığı yol, immm, her bir sütundaki farkları almamız lazım.

Oğuz: 4 saniyede 2,5 artmış uzaklık, 6 saniyede 3,75. Ne kadar saniyede uzaklığın ne kadar arttığını ya da azaldığını bulmak için ne yapmak lazım onu düşünüyorum.

Ali: Bence uzaklık sabit. Çünkü 0. saniyede 2 m ilerdeymiş. Onu verilerden çıkarırsak zaten en başta mesela 4. saniyede 4'ten az olduğunu görüyoruz, 10. saniyede de 8,25'den az. Hepsinden 2 daha az olacak yani. En başta 2 m ilerde olduğundan bir değişme yok, sabit hızla gidiyor.

A: Tablodaki hangi bilgidен sabit hızlı olduğunu anladın?

Ali: Hepsinden 2 çıkardım. Sonra artış miktarlarına baktım. (tahtaya gelip her uzaklık değerinden 2 çıkardı) her 2 saniyede 1,25 artıyor. Yani eve olan uzaklığı artıyor.

Öğrenciler, sütundaki sayıların ardışık olarak farklarını aldıktan sonra değişimin aynı olup olmadığını incelemek için ne yapmaları gerektiği hakkında tartışmışlardır. Ali, birim zamanda alınan yolun sabit olduğunu daha çok sezgisel olarak bulmuş, neden sabit olduğunu savunamamıştır. Bunun üzerine Oğuz, *hızın* sabit olduğundan emin olduğunu ancak *birim zamanda alınan yoldan* emin olmadığını belirtmiştir. Oğuz, “hız” ve “birim zamanda alınan yol” un aynı şeyi ifade ettiğini henüz bilmemektedir. Oğuz, orantısal akıl yürüterek savunmasını şu şekilde yapmıştır; “Buradaki artış miktarlarından buldum. 4 saniyede 2,5 arttıysa, 2 saniyede 1,25 artar, 6 saniyede 3,75 artar. Yani hızı sabittir.” Böylece Oğuz, devam ettirerek genişletmiş ve tablodaki değerlere ulaşarak hızın sabit olduğunu ifade etmiştir. Ancak değişimin analizi konusunda çalışılan görevler boyunca sık sık tekrarlanan, tablodaki ilişkileri yorumlamak için “farkların oranı” hakkında muhakeme etmek gerektiğini düşünememiştir.

Elif: Aradaki oranlara bakacağız. 4 ile 4,5'in, 10 ile 8,25'in arasındaki orana bakacağız....Azalıyor bence. Çünkü 4 sn de uzaklık 4,5 m olmuş, yarım artmış. Ama 10 sn de uzaklık 8,25 olmuş, 1,75 azalmış. Yani ilkinde artış var ama ikincisinde azalma var. Yani azalmış bence.

Elif ise zamana karşılık gelen uzaklık değerleri arasında bir örüntü araştırmıştır. Elif'in akıl yürütmesine göre, 4 saniyede 4,5 m yol aldıysa, 10 saniyede eve olan uzaklığı 10'dan büyük bir değer almalıydı ki hızında bir artıştan bahsedilebilsin. Oysa 10 saniyede eve olan uzaklığı 8,25 m olduğundan, Elif ayrıntıları uzaklaştırarak genişletme yapmış ve hızın azaldığına karar vermiştir. Benzer şekilde Ezgi, "4. ve 24. saniyeyi ele alırsak; 24, 4'ün 6 katı. (24 saniyede eve olan uzaklığı olan) 17'yi de 6 ya böldüm. O da 2,8 gibi bir şey çıktı. Yani (4 saniyede eve olan uzaklığı olan) 4,5'tan küçük. Azalmış yani". Ezgi ise 4 ve 24'ü birbirine oranlamış, sonra bu saniye değerlerine karşılık gelen uzaklık değerlerini birbirine oranlamıştır. İkinci oran, diğerinden küçük olduğundan hızın azaldığını ifade etmiştir. Matematiksel olarak yanlış ama kendine göre doğru bir şekilde sonuca ulaştığından işlem yaparak genişletmiştir. Yapılan tartışmalardan sonra öğrenciler, tablodaki değerlerin farklarını doğru bir şekilde yorumlayarak, farkların oranlarının sabit olduğu konusunda hem fikir olmuşlardır.

A: Farkların oranının sabit olması ne demektir?

Gül: Farkların oranı eğimdi. Eğim aynı o zaman her noktada.

A:... Bu noktalar arasındaki farkların oranının 0,625 olduğunu bulduk... Yani uzaklıktaki değişimin zamanın değişimine oranı 0,625. şöyle sorsaydım size; 4 saniyede 2,5 m yol aldıysam, 1 saniyede kaç m yol aldım? Nasıl bir işlem yaparsınız?

Bartu: 2,5'i, 4'e bölerim. Bir dakika böleyim hemen,..., 0,625. Aynı çıktı.

Melike: 0,625 birim zamanda alınan yol o zaman, 1 saniyede alınan yol.

...

Oğuz: Her saniye aldığı yol aynıysa, sabit hızla yürüyor demektir.

...

Gül: O zaman eğimle hız aynı şeyler mi oluyor?

Öğrenciler, tablodaki değerlerin farklarının oranının sabit olmasından yola çıkarak, bunu eğimin tanımıyla ilişkilendirmişlerdir. Araştırmacı, öğrencilerin düşüncelerini

yönlendirmek için sorduğu soruda basit bir doğru orantı kurmalarını sağlamıştır. Böylece öğrenciler, birim zamanda alınan yolun aslında 1 saniyede alınan yol olduğunu fark etmişlerdir. Tablodaki farkların oranı aynı olduğundan her 1 saniyede aldığı yol aynıysa, o zaman Feyza'nın sabit hızla yürüdüğü bilgisine ulaşmışlardır. Böylece, uygulanabilirlik alanını genişleterek hızın tanımına da ulaşmışlardır. Bu şekilde hızı, farkların oranı ile yani eğimle ilişkilendirerek öğrenen öğrencilerin, hız konusunda kavramsal öğrenme gerçekleştirdiği düşünülmektedir.

Öğrenciler, “Feyza 10 saniyede 16 m yol almışsa, Feyza ile eşit zaman aralıklarında eşit miktarda yol alan Melike'nin bazı zamanlarda almış olabileceği yol” ile ilgili çeşitli ihtimaller ifade etmişlerdir; 5 saniyede 8 metre, 20 saniyede 32 metre, 40 saniyede 64 metre gibi. Bunları neye göre söyledikleri sorulduğunda, eğimlerinin eşit olması gerektiğinden dolayı 10 saniyede 16 metre yol gidilmişse, bu sayıları aynı sayıyla çarparak ya da bölerek çeşitli ihtimalleri elde edebileceklerini ifade etmişler. Böylece devam ettirerek genişletmişlerdir.

Gül: Bence bunlar paralel olurlar. Bunların doğrularını çizersek (eliyle havaya çiziyor) yani 16 metreyi 10 saniyede alınmış, 8 metreyi 5 saniyede alınır. $10/16=5/8$. Biri diğerrinin 2 katı. Eğimleri aynı olduğundan da paralel.

Gül ise farklı bir bakış açısıyla, 10 saniyede 16 metre yol alınması durumuna ilişkin bu sayıları sadeleştirerek en küçük sayı çifti olan (5,8) sayılarını belirlemiştir. Bu sayıların herhangi bir sayı ile çarpılması ya da bölünmesi durumunda, oranlarının aynı kalacağını ifade etmiştir. Oranları aynı kaldığı için de eğimleri değişmeyeceğinden çizilen doğruların paralel olacağını ifade etmiştir. Daha önce bildiği bir özellik ile ilişki kuran Gül, ayrıntıları uzaklaştırarak genişletmiştir.

A: Son olarak 10 saniyede 16 metre gidildiğinde, birim zamanda aynı uzunlukta yol almak için siz 20 saniyede 32 m dediniz, ben de 21 saniyede 33 metre gidilebilir diyorum. Doğru mudur?

Bartu: Yanlış. Saniyede 1,6 metre olmalı.

Oğuz: Burada 20 saniyedekini ve 1 saniyedekini vermiş, ikisini toplarız 21 eder. Yani 32'nin üzerine 1,6'yı eklersek 33,6 eder. Yani sizin yazdığınız 0,6 eksik.

Öğrencilerin tamamı, burada çalışılan olayın orantısal olduğunun; bir değere 1 eklenince, ilgili olan diğer değere de 1 eklenmeyeceğinin farkındadırlar. Dolayısıyla bu öğrencilerin toplamsal değil çarpımsal düşündükleri şeklinde yorumlanabilir.

Merak'ın Mars'a gitmesi ile ilgili olan soru (Görev 19) üzerinde çalışmaya başlamadan önce, öğrencilere https://www.youtube.com/watch?v=gwinFP8_qIM adresinden ulaşılan Mars'a gönderilen gezginci robot Curiosity (Merak) hakkındaki kısa bir video izletilmiştir. Böylece, öğrencilerin hem ilgileri çekilmiş hem de o derste çalışacakları görevle ilgili olarak düşünmeleri ve o senaryoyu zihinlerinde canlandırmaları sağlanmıştır.

Videoyu izledikten sonra, tablodaki verilere göre Merak'ın hızının nasıl değiştiği hakkında öğrenciler çeşitli şekillerde akıl yürütmüşlerdir. Oğuz, “hızı, yüzde bir milyon artar. Çünkü atmosferden çıkınca kesin hızlanır” şeklinde yorum yapmıştır. Gül ise “benim fikrim çok bilimsel değil ama. Hani orada (videoda) Merak'ın hızı başta artıyordu, sonra parça bırakıp daha da hızlanıyordu. Yani bunun da hızlanması lazım.” diyerek fikrini belirtmiştir. Öğrencilerin yaptıkları bu yorumlara göre, izledikleri video dikkatlerini çekmiş ve robotun hızının artması ya da azalması ile ilgili olabilecek durumlar hakkında düşünmeye başlamışlardır. Öğrenciler, tablodaki değerlerin farklarını birbirine oranlayarak bir sonuca gitmeye çalışmışlardır.

Melike: (zaman ve uzaklık sütunlarındaki ardışık sayıların farklarını alarak) 3,75 saniyede 30 km gitmiş, 4,5 saniyede 36 km gitmiş.

Gül: Bu nasıl oran? 3,75'den 4,5'a çıkmış, sonra 3'e (12. saniye ile 15. saniye arasındaki zaman farkı) düşmüş geri.

Sezen: Demek ki en başlarda hızlıymış, sonra yavaşlamış, sonra geri hızlanmış.

Melike, zaman değerleri ile uzaklık değerleri arasındaki farkları alarak, robotun kaç saniyede kaç km yol gittiği hakkında yorum yapmıştır. Gül ve Sezen ise ardışık zaman değerleri arasındaki farkların 3,75'den 4,5'a çıkması ve oradan da 3'e düşmesini, hızdaki artış ve azalış olarak yorumlamışlardır.

Melike: 3 saniyede 24 km hız yapıyor. O zaman 0,75'de de 6 km hız yapıyor diye buldum. (zaman sütunundaki ilk iki sayının farkı olan) 3,75'den (12. ve 15. saniyeler arasındaki fark olan) 3'ü çıkardım, 0,75 buldum. (30. ve 60. kilometre arasındaki fark olan) 30'dan da (96. ile 120. kilometreler arasındaki fark olan) 24'ü çıkardım, 6 buldum. Yani hızı 0,75 saniyede 6 (kilometre). O zaman 1 saniyeyi düşünelim.

Gül: 6,25 (eder). 0,75'e 0,25 eklersen (1 saniye eder), 6'ya da 0,25 eklemen lazım.

Melike: Öyle değil, 3 saniyede 24 ise, 1 saniyede x'tir. O zaman 24, 3'ün 8 katı olduğuna göre hız, 8'dir.

Zaman (sn)	Uzaklık (km)
3,75	30
7,5	60
12	96
15	120
40	320
60	500
70	600

Handwritten notes on the table: 0,75 (next to 3,75), 3-24 (next to 30), 60,75-6 (next to 60), 1-8 (next to 120), and Hızın parça birleştirmek (below the table).

Şekil 24. Melike'nin çalışma kâğıdı

Melike, zaman ve uzaklık değerleri arasında bulduğu farklardan, diğer zaman ve uzaklık farklarını çıkarmış; böylece farkının farkını elde etmiştir. Elde ettiği farkların farkı değerlerini de birbirine oranlayarak; 0,75 saniyede 6 kilometre yol alırsa, 1 saniyede alacağı yol miktarını basit bir doğru orantı ile bulmuştur. Gül, bir önceki soruda çarpımsal düşünme şekline zıt olarak bu soruda 0,75 saniyede 6 km yol alınıyorsa, 1 saniyede alınan yolu bulmak için her iki tarafa da 0,25 eklemiştir. Böylece 1 saniyede 6,25 km yol aldığını ifade etmiştir.

Elif: Aralarındaki farkları alıp oranlayınca eğer oran aynı ise eğimleri sabittir, yoksa değişmiştir.

Ali: 40. saniyeye kadar eğim 8, sonra 9, sonra 10 oluyor. Önce hızı sabit sonra artıyor yani.

A: Birim zamanda alınan yol için ne söylersiniz?

Elif: Birim zamanda aldığı yol 40. saniyeye kadar 8 km, sonrasında artıyor.

Koray: O zaman 40. saniyede parça bırakmıştır hızlanmak için. Sonra daha da hızlanmak için bir parça daha bırakmıştır.

Öğrenciler, sayıların farklarını birbirine oranlayarak önce eğimler hakkında yorum yapmışlardır. Daha sonra birim zamanda alınan yolun hızı verdiği bilgisi ile ilişkilendirmişler; işlem yaparak genişletmişler ve hızın 40. saniyeye kadar sabit, sonrasında ise arttığı konusunda hem fikir olmuşlardır. Koray ise izlediği video ile ilişkilendirerek robotun parça bıraktığı için hızını artırdığı, sonra bir parça daha bırakarak hızını daha da artırdığı şeklinde yorumlamıştır.

Elif ve Oğuz, tablodaki ilişkileri grafikte göstermek için gönüllü olmuşlardır. Çizilen grafikler üzerinde hep birlikte tartışılmıştır.



Şekil 25. Oğuz'un çalışma kâğıdı

Ali: Bence o grafik yanlış. (y eksenini göstererek) burası yol değil mi? 60. saniyeye kadar yol hep artmış. Ama seninkinde sabit, durmuş, gitmiyor.

...

Bartu: Bence yanlış grafik. Çünkü hani 8'de durmuş ya, yani hız falan yok. Gitmiyor, duruyor 8'de.

Koray: Bence de yanlış. Çünkü 0. saniyede de hızı 8 oluyor. Ama 0. saniyede duruyor bu. Eğimleri de aynı değil.

Öğrencilerin, bağımlı-bağımsız değişkeni belirleme ve grafiği adlandırma konusunda zorluk yaşadıkları görülmüştür. Oğuz, yol-zaman grafiği çizmiş; ancak yol değerleri yerine hız değerlerini yazmıştır. Oysa grafiğini, hız-zaman grafiği olarak adlandırsaydı, doğru bir grafik çizmiş olurdu. Çizilen grafiğin, hız-zaman grafiği olduğunu düşünen Bartu, artan zamanla birlikte hızın da artması gerektiğini, aksi halde yol alınmadığından hızdan da bahsedilemeyeceğini düşünmektedir.



Şekil 26. Elif'in çalışma kâğıdı

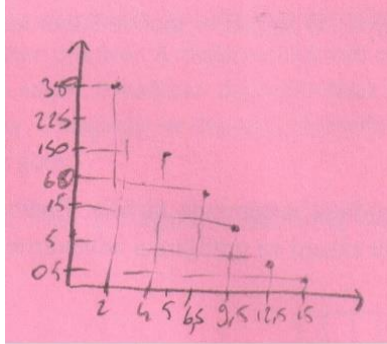
Melike: Bence bu grafik doğru. Ben de böyle çizdim.

Gül: Ama eksenlerdeki değerler yanlış bence, birazında zaman birazında uzaklık sayıları var.

Bartu: 40. saniyede mi kırılıyor, 60. saniyede mi? 40. Saniyeye kadar eğim hep aynı, sonra 60'a kadar 9 oluyor. Evet, ama sonra da 60'dan sonra 10 oluyor eğim. Bence iki kez kırılmalı doğru yukarı doğru.

Elif'in çizdiği grafikte, eksenlere yazdığı sayıların rastgele sayılar olduğu görülmektedir. Bazı sayılar uzaklık değerini belirten, bazı sayılar zaman değerini belirten, bazıları ise ikisinin arasındaki farkları belirten sayılardır. Elif'in, eksenlerin hangi değişkenleri gösterdiğine dikkat etmeden sayıları yazdığı görülmektedir. Bartu, zaman aralıklarındaki hız değişimlerini göz önüne alarak, doğrunun 40. ve 60. saniyelerde eğimi arttığından daha dik çizilmesi gerektiğini düşünmektedir. Böylece, eğimi daha çok olan doğruların daha dik çizilmesi gerektiğini, uygulanabilirlik alanını genişleterek ifade etmiştir.

Merak'ın Mars'a indiği soruyla (Görev 20) ilgili olarak öğrenciler, tablodaki bilgileri grafikte göstermeyi denemişlerdir. Öğrencilerin tamamı, hız-zaman grafiğini doğru bir şekilde çizmişlerdir. Merak'ın Mars'a olan uzaklık-zaman grafiğiyle ilgili olarak ise Bartu, grafiğini tahtaya çizmeye gönüllü olmuştur.



Şekil 27. Bartu'nun çalışma kâğıdı

Bu grafikle ilgili olarak öğrenciler yorumlarını şu şekilde yapmışlardır:

...

A: Bağımsız değişkeniniz ne?

Oğuz: Zaman, çünkü kafasına göre hareket ediyor, uzaklığı da etkiliyor.

Ali: Geçen derste şöyle yapmıştık, Merak dünyadan fırlatılınca, dünyadan uzaklaşır, grafik de böyle olur (eliyle havada artan bir doğru grafiği çiziyor). Fakat burada Mars'a yaklaştığı için daha da azalıyor uzaklık. O yüzden böyle azalan bir grafik (doğru) olur bence.

Oğuz, bağımsız değişkenin zaman olduğunu belirtmiş ve bunu kendi tabiriyle “kafasına göre hareket eden” olarak açıklamıştır. Ali ise bir önceki soruda çizilen doğru grafiğiyle

geri ilişkilendirme yapmıştır. Bir önceki soruda robotun dünyaya olan uzaklığı arttığı için, artan bir doğru olmasından yola çıkan Ali, bu soruda Mars'a olan uzaklık azaldığı için bu grafiğin doğru olduğunu belirtmiştir. Böylece devam ettirerek genişletmiştir. Koray ise Bartu'nun grafikte gösterdiği noktaların bir doğru halinde çizilmesi gerektiğini ifade etmiştir. Gerekçesini ise şu şekilde belirtmiştir: “Daha önceki derslerde eğer doğru aradaki tüm noktaları sağlıyorsa, düz çizgi halinde çizilir dedik. Burada da zaman geçtikçe uzaklık hep azalır. Yani noktaları birleştirmeliyiz bence.” Koray, önceki derslerle geri bağlantı kurarak ilişkilendirme yapmıştır. Doğru üzerindeki her bir x 'e karşılık, y değerlerinin de doğruyu sağladığını ifade ederek, ayrıntıları uzaklaştırarak genişletmiştir.

Ezgi: bunu doğru halinde gösterdik ya, şimdi bunun eğimi her yerde aynı oldu, 350/15 oluyor. Yani hızı da 350/15 oluyor. Ama az önce her aralıkta hızını farklı bulduk, birazı artmıştı, birazı azalmıştı.

Bartu: onu ben de fark ettim de, aynı oranda mı indirsem, biraz daha mı kırsam, hangisinde daha çok kırsam bilemedim. O yüzden bu şekilde yaptım.

Ezgi, doğrusal olarak çizilen doğrunun eğimini bularak robotun hızı ile ilişkilendirmiştir. Merak'ın hızıyla ilgili olarak farklı zaman aralıklarındaki hızı da farklı olduğundan, robotun hızının değiştiği noktalarda doğrunun kırılacağını ifade etmiştir. Robotun hızının yüksek olduğu zaman aralıklarında doğrunun daha dik olacağını, hızın düşük olduğu zaman aralıklarında ise doğrunun daha eğik olacağını belirten Ezgi, uygulanabilirlik alanını genişletmiştir.

Denklemlerin doğrusunu çizme ile ilgili görevler (Görev 21, 22, 23), araştırmacının gözlemlerinden yola çıkılarak oluşturulmuş, alan yazında işaret edilen öğrencilerin karşılaştıkları zorlukları gidermek amacıyla sorulmuş sorulardır. Öğrencilerin grafik çizme ile zorlandıkları konular genellikle grafik okuma ve yorumlama, grafik çizme, grafiklerle diğer gösterimler arasında ilişki kuramama ve geçişleri yapamama olarak kategorize edilebilir (Bayazıt, 2011; Knuth, 2000). Dolayısıyla bu görevler, öğrenci sorunlarını gidermek amacıyla sorulmuş sorulardır. O sebeple öğrencilerin her bir göreve ilişkin çizdiği grafikleri analiz etmek yerine, grafik çizme ile ilgili öğrencilerle birlikte ulaşılan kuralların analizine yer verilecektir.

Verilen denklemlerin grafiklerinin çizilmesini içeren görevlere gelindiğinde öğrenciler, verilen denklemlere ilişkin tabloda istenen değerleri yazmışlar ve grafikleri çizmeye çalışmışlardır.

A: ... x 'in katsayısı nasıl artmış?

Elif: Sırasıyla 1, 2, 3.

A: ... Mesela $y=x$ denkleminin eğimi nedir?

Melike: y 'deki değişimin x 'deki değişime oranı $1/1$ 'den 1 olur.

A: $y=2x$ denkleminin eğimi nedir?

Bartu: $2/1=2$ dir.

Melike: x 'in katsayısı eğimi verir.

Bartu: Hatırladım, geçen sene öğretmen söylemişti bunu, $y=mx$.

Ezgi: m de eğim oluyor o zaman.

$y=mx$ ve $y=mx+n$ şeklindeki denklemlerin arasındaki farkın ne olduğunu bilmeyen öğrenciler, bu doğruları grafikte göstermekte de sorun yaşamaktadırlar. Verilen $y=x$, $y=2x$, $y=3x$ denklemlerinde x 'in aldığı değere karşılık, y 'nin alacağı değeri tabloda görmeleri ve bununla ilişki kurarak grafiğini çizdiklerinde belirtilen sorunların giderileceği düşünülmektedir. Dolayısıyla öğrencilerden, her bir denklemin doğrusunu çizdiklerinde eğimi bulmaları, buldukları bu eğimle x 'in katsayısını ilişkilendirmeleri istenmiştir. Yukarıdaki diyalogda görüldüğü gibi öğrenciler, bir önceki seneye ait olan bilgileriyle ilişkilendirerek uygulanabilirlik alanını genişletmişlerdir. Ancak Koray, fikrini " $x=1$ noktasında her üç doğruya karşılık gelen noktalar burada 1 eder, burada 2 ve burada da 3. Sonra bize diyor ki bu değerler ile denklemdaki değerler arasında ilişki var mıdır diyor. Buradaki y değerlerini bulmak için bize verilen x değerini 0'dan başlayarak sayılarla toplamıyor; 0, 1, 2 veya 3 gibi. Bunu 0'la toplarsak 1 değerini buluruz, 1'le toplarsak 2 değerini buluruz." olarak ifade etmiştir. Koray, $y=mx$ şeklinde verilen doğrunun eksenlerde karşılık gelen noktalarını bulmak için sayıları birbiri ile toplayarak, y değerini bulabileceğini ifade etmiştir. Dolayısıyla Koray'ın, denklemdaki çarpım ifadesini fark edemeyerek toplamsal düşündüğü söylenebilir.

A: ... Mesela $y=x+1$ doğrusunun grafiğini düşünelim. $x=0$ ise $y=1$ olur, $x=1$ ise $y=2$ olur. $y=x$ doğrusunun grafiğine göre farklılaşan nedir?

...

Bartu: $y=x$ doğrusu y eksenini üzerinde yukarı kaymış. +1 kadar yukarı kaymış.

A: Böyle denklemleri $y=mx+n$ şeklinde gösteririz ve grafik üzerinde $y=mx$ doğrusuna göre n kadar y eksenini üzerinde kaydırırız.

Bartu: $y=x-1$ olsaydı o zaman $y=x$ doğrusu y ekseninde 1 aşağı mı gidecekti?

A: Evet.

Bartu: O zaman n, y'yi kesen nokta oluyor galiba.

Öğrencilerin anlamakta zorlandıkları noktalardan biri de cebirsel ifadelerin gösteriminde kullanılan harflerdir. Yani $y=mx+n$ ifadesinde, m ve n'nin ne anlama geldiğini bilmemektedirler. Burada öğrencilere, m ve n'nin ne anlama geldiği verilen denklemler üzerinden çizilerek gösterilmiştir. Bartu da uygulanabilirlik alanını genişleterek, n'nin y eksenini kesen nokta olduğunu ifade etmiştir. Bu konuyu daha önceden işlemiş olmalarına rağmen, denklemdeki m ve n değerlerinin anlamını bilmemeleri, bu konuda kavramsal öğrenmenin gerçekleşmediği şeklinde yorumlanabilir.

Bir sonraki göreve gelindiğinde, öğrencilerin tamamı doğruların grafiğini doğru bir şekilde çizmişlerdir. Doğruların aynı ya da farklı olan yönleriyle ilgili olarak tüm denklemlerin $y=mx+n$ şeklinde yazılabileceğini, n'ler farklı olduğundan doğruların y eksenini 3, 4 ve 5 noktalarında kestiğini, eğimlerinin eşit ve 1 olduğunu dolayısıyla paralel olduklarını da eklemişlerdir.

$3x+2y-12=0$ denkleminin doğrusunu çizme sorusunda öğrenciler, daha önceden bildikleri kuralla ilişkilendirerek x'e 0 değerini verip y değerini ve y'ye 0 değerini verip x değerini bulmuşlardır. Buldukları (0,6) ve (4,0) noktalarını, doğrunun eksenleri kestiği nokta olarak yorumlamadıklarından (4,6) noktası ile orijini birleştirerek bir doğru çizmişlerdir. Bu durumda öğrencilere, x'e 0 değerini verdiklerinde, buldukları y noktasını işaret eden (0,6) noktasının, doğrunun y ekseninden geçtiği nokta olduğu, yani y eksenini kestiği nokta olduğu açıklaması yapılmıştır. Aynı şekilde y'ye 0 vererek buldukları x noktasının da (4,0) noktası olduğu ve bu noktanın da doğrunun x eksenini kestiği nokta olduğu anlatılmıştır. Dolayısıyla bu iki noktayı birleştiren doğrunun, istenen denklemin doğrusu olduğu ifade edilmiştir. Elif, bu soruda orijini ve (4,6) noktasını birleştiren kendi çizdiği doğrusu ile ilgili olarak “O zaman bizim çizdiğimiz başka bir şey. Bizim çizdiğimiz doğrunun iki noktası da orijin ve (4,6) noktası oluyor. $y=mx$ şeklinde bir doğru olur orijinden geçtiği için.” açıklamasını yaparak, ayrıntıları uzaklaştırarak genişletmiştir.

$y=6$ doğrusunun grafiğini, tüm öğrenciler çizmişlerdir. Araştırmacının, “denklemini $y=6$ şeklinde gösterebileceğiniz bir senaryo düşünün” şeklindeki sorusu üzerine Koray, “mesela

1 milyoncular var ya, dükkânda her şey 1 milyon oluyor, o dükkânda her şey 6 lira olsa, dükkândaki satılan her mal ile parası arasındaki ilişki bu şekilde verilir. Oyuncak da 6 lira, kola da 6 lira.” cevabını vermiştir. Böylece verilen denklemi yeni bir durumla ilişkilendirmiştir. Oluşturduğu yeni durumda değişkenleri ve değişkenler arasındaki ilişkiyi doğru bir şekilde ifade etmiş ve devam ettirerek genişletmiştir.

Beşinci haftanın sonuna doğru değişimlerin analiz edilmesiyle ilgili olan görevler tamamlanmıştır. Öğrenciler, eğitim hakkındaki eksik bilgilerini büyük oranda gidererek, eğimi değişimlerin analizi boyutunda değerlendirmeye başlamışlardır. Benzer şekilde hız kavramını da değişimlerin analizi boyutunda incelemişler, hız ve eğim kavramlarını ilişkilendirmişlerdir. Verilen herhangi bir tablodaki ilişkileri yorumlarken x sütununu kendi içinde, y sütununu kendi içinde, x ile y sütunlarını birbirleri arasındaki ilişkiden yola çıkarak yorumlamayı öğrenmişlerdir.

4.1.3. Denklemlere İlişkin Düşünme Yolları

Öğretim deneyinde denklemler ile ilgili olan görevler, değişen niceliklerin birbirlerine göre ilişkisini cebirsel olarak yazılıp ifade edilmesi istenen görevlerdir. Öğretim deneyinin 11. gününe gelindiğinde öğrenciler, bir tablodaki nicelikler arasında hem x sütunun kendi içinde, y sütunun kendi içinde hem de x ve y sütunun birbiri ile ilişkili olduğunu ve bir örüntü araştırırken bu ilişkilerin analiz edilmesi gerektiğini bilmektedirler. Burak ve Selin’den kimin daha hızlı yürüdüğüne (Görev 24) karar vermek için de öğrenciler, tablo ve grafik şeklinde verilen niceliklerin birbirlerine göre değişimini analiz etmekle işe başlamışlardır. Burak’ın hızını bulmak için tablodaki değerlerin farklarını alarak oranları hakkında tartışmışlardır;

Koray: Burak 2 saniyede (2. saniyeden 4. saniyeye kadar) 0,75 m yol almış. Sonra diğerinde de (4. saniyeden 6. saniyeye kadar) 2 saniyede 0,75 m yol almış. Aynı zaman aralıklarında aynı mesafede yol almış yani.

Sezen: ama sonra bozulmuş. 6. saniyeden sonra daha çok artmış bence aldığı yol.

Koray, tablodaki değerlerin farklarını alarak yarışmacının eşit zamanda eşit miktarda yol aldığını ifade etmiştir. Tabloda 3 saniyede alınan yolun kilometre olarak daha çok olduğunu fark eden Sezen, aradaki farkların oranını almak yerine niceliğin çokluğundan yola çıkarak yorum yapmıştır. Bunun üzerine Ali, “6. saniyeye kadar sabitlemiş de ama şurada 3 saniye fark var. Mesela 6’da (saniye) 2,25 (m) gitmiş ya, onu 2’ye böldüm 3 ile

çarptım. 9. saniyedeki uzaklığını buldum. Tablodakiyle aynı olduğundan hızı sabit” şeklinde yaptığı işlemi anlatmıştır. Yarışmacının 6. saniyede aldığı yolu 2’ye bölüp 3’le çarparken Ali, aslında nicelikler arasında doğru orantı kurmuş ve 6. saniyede 2,25 m yol gittiyse 9. saniyede kaç m yol gidileceğini bulmuştur. Bulduğu değer ile tablodaki değer aynı olması üzerine Ali, yarışmacının sabit hızla gittiğini ifade etmiştir. Böylece, oranlar arasındaki ilişkiyi araştırmış ve sonrasında ise işlem yaparak genişletmiştir.

Selin’in hızı ile ilgili olarak öğrenciler, eğimin negatif olmasının ne anlama geldiği hakkında tartışmışlardır:

A: Selin’in eğimi neden negatif?

Ali: Zaman geçtikçe geriye geliyor selin.

Melike: Hızı azalıyor olabilir.

A: 0. saniyede Selin nerede?

Bartu: Başlangıç noktasına 10 m uzakta.

...

A: O zaman geriden başladığı için eğim negatif olmuş ve hızı azalmış mı diyeceğiz?

Ali: Hayır. Zaman arttıkça basketbol sahasına uzaklığı azalıyor. Ama doğru hiç kırılmadığı için ve eğim her yerde aynı olduğu için hızı da değişmez.

A: Doğru ne zaman kırılır?

Elif: Eğim değiştiğinde. Eğim artarsa daha dik olur, azalırsa daha yatık olur.

Öğrencilerden bir kısmı Melike gibi, grafikte azalan bir doğru gördükleri için hızın azalmış olduğunu ifade etmişlerdir. Oysa grafiğin, hız-zaman grafiği değil uzaklık-zaman grafiği olduğunu dikkate almamışlardır. Daha sonra yarışmacının başlangıç noktasına uzaklığının 10 m olduğunu ifade etmişler; ancak 10 m ileride mi geri de mi olduğu hakkında tartışmışlardır. Doğrunun y eksenini kestiği noktanın pozitif işaretli olmasından yola çıkarak, pozitif bir uzaklık söz konusu olduğundan başlangıç noktasında, yarışmacının 10 m ileride olduğuna karar vermişlerdir. Öğrenciler, doğru kırılmadığından eğimin değişmediğini, eğim değişmediğinden hızın da sabit kaldığını da eklemişlerdir. Uzaklık-zaman doğrusu azalan olduğundan, Selin’in başlangıç noktasına olan uzaklığının azaldığını, dolayısıyla ters yöne gittiğini de belirtmişlerdir.



Şekil 28. Gül'ün çalışma kâğıdı

Gül: Bence Selin daha hızlı. Şurada küçük bir üçgen var, burada da büyük bir üçgen var. Bunlar benzer üçgenler olurlar. Küçük üçgende şu kenar 2, şu kenar 3. Büyük üçgende de şu kenar 8, şu kenar x olsun. 2'nin 3'e oranı, 8'in x 'e oranına eşit olur. O zaman burası 12 olur. 15. saniyede başlangıç noktasına gelmiş. 10 bölü 15'ten $2/3$ olmuş eğimi yani hızı.

Ali: Ona gerek yok ki. Küçük üçgende zaten uzaklığın zamana oranı $2/3$. Doğru kırılmadığından eğim değişmez.

Grafikte dik üçgenlerin oluştuğunu fark eden Gül, bu üçgenlerin benzerliğinden yola çıkarak akıl yürütmüştür. Buna göre doğrunun x eksenini kestiği nokta ile $(3,0)$ noktasının arasındaki uzaklığı bulmak için, doğrunun eksenleri kestiği noktalar ile $(3,8)$ noktası arasında oluşan büyük ve küçük dik üçgenlerin benzer üçgenler olduğunu ifade etmiştir. Daha sonra benzer üçgenlerin özelliğinden yararlanarak, benzer kenarların oranını aldığı anda aradığı uzaklığın 12 birim olduğunu bulmuştur. Bu bulduğu değere de 3 ekleyerek, doğrunun x eksenini kestiği noktayı $(15,0)$ olarak ifade etmiştir. Buradan da doğrunun eğimini, dolayısıyla yarışmacının hızını $2/3$ olarak belirlemiştir. Gül, öncelikle benzer üçgenlerin kenar uzunlukları oranı ile ilişkilendirme yapmış, sonrasında ise işlem yaparak genişletme yapmıştır. Ali ise bir doğru boyunca eğim değişmeyeceğinden, küçük üçgende açının tanjantı ile büyük üçgende aynı açının tanjantının birbirine eşit olacağını belirtmiştir. Ali de benzer üçgenlerde karşı dik kenar ile komşu dik kenarın oranının değişmeyeceği özelliğinden yararlanmış, ek olarak doğru boyunca eğimin de değişmediğini ifade etmiştir. Böylece Ali, uygulanabilirlik alanını genişletmiştir.

Tablodaki nicelikler arasındaki ilişkiyi denklem şeklinde gösterme ile ilgili olarak Oğuz, $y = 3/4x + 8$ denklemini yazmıştır.

Ali: Kesiri ne aldın?

Oğuz: 0,75. 3 bölü 4 eder. Onu aldım ben de.

Ali: Ama o 2 saniye(ki mesafe farkı). Ben 1 saniye aldım. 1.5 bölü 4 eder.

...

A: Denklemini nasıl yazdın?

Oğuz: Eğimini yazdım. $mx+n=y$ 'den yaptım. m'imiz zaten 3 bölü 8. n de 8.

A: n, neden 8?

Oğuz: Öylesine bir sayı n. Attım.

A: Ben de n'e 4 veririm. O zaman bir ilişkiye ait iki farklı denklemimiz olur. Doğru olur mu?

Oğuz: n yerine herhangi bir sayı gelebilir zaten, n normal bir sayı.

Bartu: n, terim sayısı değil mi?

Koray: Evet, n örüntülerdeki terim sayısı demek 1,2,3, gibi.

Oğuz, yazdığı denklemde x' in katsayısı olarak az önce buldukları eğimi almak yerine, yarışmacının 2 saniyede almış olduğu yolu almıştır. Sonra Ali'nin uyarısı üzerine hatasını düzelterek 0,75 m, 2 saniyede alınan yol olduğundan bir saniyede alınan yolu, x' in katsayısı olarak yazmıştır. Ayrıca cebirsel gösterimlerdeki harfler hakkında kısıtlı bilgiye sahip olduklarından Oğuz, n'nin keyfi bir sayı olduğunu belirtmiştir. Koray ve Bartu, birkaç sınıf arkadaşı gibi n'nin terim sayısı olduğunu ifade etmişler ve örüntünün kuralını bulurken kullandıkları terim sayısı olan n ile geri ilişkilendirme yapmışlardır. Öğrenciler, harfleri nesne olarak düşündüklerinden, $y=mx+n$ denklemindeki n ile örüntü kuralı bulmada terim sayısını ifade eden n' nin aynı şeyi simgelemesi gerektiğini düşünmüşlerdir.

Araştırmacı, öğrencilerin dikkatini öncelikle yazılacak denklemin ne tür olduğuna çekmek için, Burak'ın uzaklık-zaman tablosuna göre 0. saniyede nerede olduğunu sormuştur. Elif'in, 0. saniyede başlangıç noktasında olduğunu ifade etmesi üzerine Ali de “(0,0) noktası yani” diyerek başlangıç noktası ile bu noktanın grafik üzerindeki konumunu ifade etmiştir. Bunun üzerine Koray, doğrunun orijinden geçmesi gerektiğini belirtmiştir. Melike'nin “ $y=mx$ şeklinde bir denklem” yazmaları gerektiğini söylemesi üzerine, eğimin $\frac{3}{8}$ olmasından dolayı denklemin $y = \frac{3}{8}x$ olması gerektiğini de eklemiştir. Böylelikle orijinden geçen doğrunun şekilsel özelliğini ilişkilendiren Melike, ayrıntıları uzaklaştırarak genişletmiştir.

A: Gelelim Selin'in denklemine.

Gül: $y = \frac{2}{3}x$.

Oğuz: Ama orijinden geçmiyor.

Gül: O zaman $2x=3y$. Orijinden geçmediği için böyle yazabiliriz.

Koray: Aynı şeyi yazdın yine. İçler dışlar çarpımı yapıp aynı denklemi yazdın.

Gül, az önce ifade ettikleri denklemin formu ile geri ilişkilendirme yaparak, bu doğruyu orijinden geçen bir doğru denklemi olarak ifade etmiştir. Daha sonra doğru orijinden geçmiyorsa, y 'nin katsayısı olması gerektiğini düşünerek, $y = \frac{2}{3}x$ ile aynı denklemi ifade eden $2x=3y$ denklemini yazmıştır. Bunun üzerine Koray, objeleri ilişkilendirerek bu iki denklemin de aynı denklem olduğunu, ilk denklemde yapılan içler ve dışlar çarpımı işlemi ile ikinci denklemin elde edildiğini ifade etmiştir.

Koray: Şimdi grafiği denkleme dökmeye çalışalım. Orijinden geçmediğine göre $y=mx+n$ şeklinde bir denklem olacak.

Ali: Eğim zaten $\frac{2}{3}$ tü. O zaman $\frac{2}{3}x-10=y$ olur.

A: x yerine 0 koyun. O zaman doğrunun şu noktadan $(0,-10)$ geçmesi lazımdı. Neden öyle oldu?

Melike: Ama eğim negatif.

Ali: $-\frac{2}{3}$ olsa? Yani şöyle $-\frac{2}{3}x-10=y$.

Bartu: Bence +10. Çünkü biri – biri + olmalı ki eşit olsun.

Koray: $-\frac{2}{3}$ ise gerisine gerek yok ki. Az önce $y=mx$ dedik ya, m 'i $-\frac{2}{3}$. Gerisine ihtiyacımız yok ki.

Gül: +10 yerine – 11 de diyebilirsin. Paralel yani. Sıkıntı yok. $y=-\frac{2}{3}x$ yeterli, 10 eklemeye gerek yok. Paralel sonuçta.

Öğrencilerin, $y=mx+n$ formundaki bir denklemde m ve n 'nin anlamları konusunda eksiklikleri olduğu gözlenmektedir. Bu harflerin işaretleri konusunda bile doğru bilgileri bulunmamaktadır. Zira Bartu, işaretlerden rastgele birinin eksi birinin artı olmasının, eşitlik oluşturacağını düşünmektedir. Koray, ilk başta bir önceki soruyla ilişkilendirme yaparak, doğru orijinden geçmediğinden $y=mx+n$ formunda bir denklem yazmak gerektiğini belirtmiştir. Sonrasında ise n 'nin anlamını bilmediğinden, değerini bildiği m değerini alarak $y=mx$ formunda bir denklem yazmıştır. Aynı sorunu devam ettiren Gül, denklemde n 'ye herhangi bir değer vermeye bile gerek duymadan, bildiği değerleri kullanarak $y=-\frac{2}{3}x$ denklemini yazmıştır. Gerekçe olarak ise n yerine yazılacak değerler ile elde edilecek doğruların, y eksenini kestiği noktalar değişse bile eğimleri aynı olacağından, paralel olduklarını belirtmiştir. Oysa Gül, doğrunun y eksenini kestiği nokta ile n değerinin

aynı olduğunu bilmemektedir. Dahası, $y=-\frac{2}{3}x$ denklemine paralel olan her doğrunun, soruda istenen doğruyu verdiğini düşünmektedir.

A: ... Selin'in doğrusu orijinden geçmediğine göre $y=mx+n$ şeklinde olacak. Eğimi biliyoruz. Peki n nedir?

Sezen: Terim sayısı. 1,2,3, ... diye gidiyor ya.

Melike: Doğruların kesiştikleri nokta.

Ali: y eksenindeki başlangıcı.

...

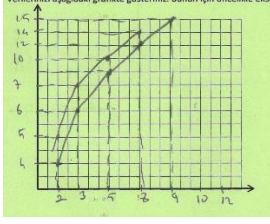
A: ... Doğrumuzun eğimi $-\frac{2}{3}$ ve y eksenini kestiği nokta 10 ise denklemi şu şekilde yazabiliriz; $y=-\frac{2}{3}x+10$.

...

Gül: O zaman $3y=30-2x$ de yazabiliriz.

Öğrencilerin n'nin ne olabileceği hakkında yorumları terim sayısı, doğruların kesiştiği nokta, doğrunun y eksenindeki başlangıcı şeklindedir. Gül, yazılan denklemin sonucuna odaklanarak benzer sonuç araştırmış ve paydaları eşitleyerek denklemi başka bir şekilde ifade etmiştir.

Uyum doğrusu çizme ile ilgili soruya (Görev 25) gelindiğinde, öğrenciler tablodaki zaman-uzaklık değerlerinin düzensiz artışı ve bazı zaman değerleri için iki uzaklık değeri olduğunu fark etmişlerdir. Melike ve Ezgi, uzaklık ve zaman değerlerinin farklarını ve farkların oranını incelemişlerdir. Ancak örneğin; 2. saniyede hem 4 km hem 5 km uzaklık bilgisi olduğundan uzaklık farkı 1 km, zaman farkı ise 0 çıktığından işlem yapılamayacağını belirtmişlerdir. Gül ise en küçük zaman değerleri ile en küçük uzaklık değerlerini birlikte alarak işlem yapmak gerektiğini söylemiştir. Araştırmacı tablodaki değerlerin iki farklı denemeye ait olduğunu, mesela birinci denemede 2. saniyede 4 km yol alınmışken, ikinci denemede 5 km yol alındığı şeklinde düşünerek tabloyu yorumlamalarını istemiştir. Bunun üzerine öğrenciler, tablodaki noktaları grafikte göstermeyi denemişlerdir. Doğrunun nasıl çizileceği konusunda bir süre tartışmışlardır. Elif, üst kısımda kalan noktaları bir doğruda ve alt kısımda kalan noktaları da bir doğruda birleştirmeyi önermiştir. Bartu ise noktaları rastgele birleştirerek iki farklı doğru elde etmiştir. Araştırmacı, Elif'in çalışma kâğıdına çizdiği doğruları tahtaya çizmesini istemiştir.



Şekil 29. Elif'in çalışma kâğıdı

Elif'in çizdiği grafik üzerinden öğrencilerin düşüncelerini yönlendirmek için araştırmacı, “Bakın arkadaşınız üst kısımdaki noktaların bir ölçüme, alt kısımdaki noktaların da diğer ölçüme ait olduğunu düşündü. Ama bundan emin olamayız. Tüm noktaları sağlayan, sağlamıyorsa bile tüm noktalara yakın noktalardan geçecek sadece bir doğru çizmek istesek, nasıl çizeriz onu düşünün.” şeklinde uyarıda bulunmuştur. Bunun üzerine Ali, “Tahtada çizili iki doğrunun arasına bir doğru çizilirse, bütün noktaları hemen hemen sağlayacağını” belirtmiştir. Araştırmacı, tablodaki değerleri bilgisayarda <http://illuminations.nctm.org/Activity.aspx?id=4186> adresinden ulaşılan elektronik tabloya girmiştir. Elde edilen doğrunun, tüm noktaların üzerinden geçmese bile bu noktaları sağlayan en uygun doğru olduğunu, adının da uyum doğrusu olduğunu ifade etmiştir. Daha sonra öğrenciler, sırayla bazı keyfi değerleri elektronik tabloya girmişlerdir. Böylece öğrencilerin uyum doğrusunu daha iyi anlamaları sağlanmıştır.

Çözümü verilen grafik hakkında problem yazma konusunda (Görev 27), öğrencilerin kafalarının karıştığı gözlemlenmiştir. Daha önce böyle bir soru görmediklerini ifade ederek biri artan diğeri azalan ve bir noktada kesişen iki doğru ile ifade edilebilecek durumlar hakkında düşünmeye başlamışlardır.

Melike: ‘ $y=4,5x+8$ ve $y=3,5x-20$ denklemlerinin doğrusunu çizin ve nerede kesiştiklerini bulun’ olabilir mi?

Koray: Ama burada azalan doğru var. Senin denklemlerin ikisi de artan.

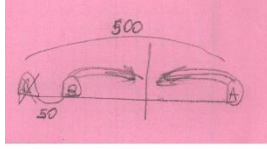
Melike: O zaman biri $y=-3.5x-20$ olsun.

...

Ali: O zaman da -20 olmaz ki, y eksenini pozitif noktada kesmiş.

Melike, önceki derslerde çözülen sorularla geri ilişkilendirme yaparak iki denklem verip, bunların grafiğinin tabloda gösterilmesi ile ilgili bir soru yazmıştır. Ancak denklemlerin eğimlerine, y eksenini kestiği noktalara ve bunların işaretlerine dikkat etmediği görülmektedir. Gül ise fikrini, “iki farklı doğru varsa, iki farklı olaydan bahsetmemiz

lazım. Biri artan biri azalan. Havuz olabilir, motor havuzdaki suyu boşaltır, başka bir havuza doldurur. Bu (artan doğru) havuza doldurduğu su, bu da (azalan doğru) çektiği suyu gösterir.” şeklinde belirtmiştir. Kesişim noktasının hangi bilgiyi verdiği sorusu üzerine Oğuz, bu noktanın “su çekilen havuzda kalan su ile suyun dolduğu havuzdaki suların eşit olduğu zamanı” gösterdiğini ifade etmiştir.



Şekil 30. Ali’nin çizdiği şekil

Ali: ... iki araba olsa, bunlar böyle hareket etseler. Birbirlerine doğru hareket ediyorlar ve kesiştikleri yer de karşılaşma noktaları. Yol 500 metrelik bir yol olsa, arabanın biri 50. metreden başlayacak, biri 500 metrenin sonundan. Aynı sürede mi olsa acaba? Bunların hızları aynı gibi görünüyor. Aynı doğru gibi, biri artmış biri azalmış. ... Bu araba birazcık önde başlamışsa daha yavaş olsun. ... “B arabası saatte 30 km hızla gitmektedir. A arabası da saatte 40 km hızla gitmektedir. B arabası yola başlangıç noktasına göre 50 kilometre daha önde başladığına göre ve A arabası da başlangıç noktasına doğru 500 kilometre uzaktan başladığına göre bu arabalar nerede, ne zaman karşılaşırlar?”

Ali ve Gül’ün verdikleri örnekler, bağlamsal olarak verilen grafiğe uygundur. Ayrıca bağımlı ve bağımsız değişkenleri doğru bir şekilde ifade etmişlerdir. Ali’nin hızı, birimlere dikkat ederek “saatte 30 km” olarak ifade etmesi ise detaylı bir şekilde düşündüğünün göstergesi olabilir.

Hangi otobüs firmasının tercih edileceği soruyla (Görev 26) ilgili olarak öğrenciler, A ve B firmalarının önerdiği fiyatlara dair bir kural bulmaya çalışmışlardır. Sezen, A firmasının kişi başına istediği ücretin sabit olduğunu düşünmüştür. Bu sebepten önceki sorularla da ilişkilendirme yaparak, tek kişinin ödeyeceği ücreti “A firması kişi başı 27 lira ister. 5 kişi ile 10 kişi arasında 5 kişi var. 400’den 535’e de 135 lira var. 135’i 5’e bölersem 27 lira eder kişi ücreti.” şeklinde ifade etmiştir. Sezen’in önceki sorularda farkların oranını hesaplayıp, bu oran üzerinden yorum yapmaya alışık olduğundan, bu şekilde işlem yaptığı düşünülmektedir. Bunun üzerine Koray, istenen ücretin kişi sayısı ile doğru orantılı olarak artmadığını fark ederek “burada örüntü yok ki, kişi sayısı 5’er artmış ama toplam ücret düzensiz artmış” şeklinde ifade etmiştir. Daha sonra istenen ücret ve kişi sayısı arasındaki farkları ve farkların oranını inceledikten sonra kişi sayısı arttıkça, kişi başına ödenen

ücretin azaldığı konusunda hem fikir olmuşlardır. Öğrenciler, B firmasının, kişi sayısı ile istediği toplam ücret arasında doğru orantılı bir ilişki olduğunu fark etmişlerdir. Grafikte görülen noktaları bir doğru boyunca birleştirilip birleştirilmeyeceği ile ilgili olarak bütün öğrenciler, eğim her yerde aynı olduğundan noktaların doğrusal olduğunu, dolayısıyla bir doğru boyunca birleştirilebileceğini ifade etmişlerdir. Bunun üzerine öğrencilerin daha farklı bir şekilde düşünmelerini sağlamak için araştırmacı, “Bütün x’ler için yani doğru üzerindeki her kişi için ücret belirlemek anlamlı olur mu?” sorusunu sormuştur. Kısa bir tartışmadan sonra Ali, fikrini “Birleştiremeyiz, çünkü yarım insan olmaz... Reel sayılarda çalışıyorsak birleştiremeyiz. Eğer tam sayı ise bu sayılar (x eksenindeki sayılar), o zaman birleştirebiliriz” şeklinde ifade etmiştir. Böylece Ali, ayrıntıları uzaklaştırarak genişletme yapmıştır. Bunun üzerine Gül, bir önceki güne ait ödevle ilişkilendirme yaparak “dünkü ödevde birleşiyordu ama orada arabanın saniyelere göre gittiği yolu buluyorduk. Çeyrek saniyeden de bahsedilebilir orada. Ama burada yarım insan olmaz.” şeklinde devam ettirerek genişletmiştir. Tura 38 kişi gidilirse, A firmasına toplam kaç lira ücret ödeneceği ile ilgili olarak ise Koray, “35 kişi ile 40 kişi arasında 5 kişi var. Ücretler farkı da 70 lira ediyor. 70’i 5’e böldüm, kişi başı 14 lira. 35 kişinin üstüne 3 kişinin parasını bulmalıyım. $14 \times 3 = 42$ lira. 1070 liranın üzerine eklersem 1112 lira eder ” şeklinde işlem yaparak genişletmiştir.

Hangi mağazadan DVD kiralanacağı ile ilgili olan soruda (Görev 28), öğrencilerin soruyu anlamakta zorlandıkları gözlemlenmiştir. Depozitonun ne demek olduğunu anlamakta zorlanan öğrenciler, depozitonun ödenecek ücrete etkisini belirlemede sıkıntı yaşamışlardır. Kiralanacak her bir DVD için ödenecek depozito miktarının da DVD sayısı ile orantılı olarak artacağını ifade etmişlerdir. Sonrasında Koray, “ben anladım. Yani şöyle, DVD’lere iyi bakma parası olarak veriyoruz bu parayı. Diyoruz ki DVD’lerinize iyi bakacağız ama bir şey olursa diye bu parayı alın diyoruz” şeklinde yeni bir durum oluşturarak ilişkilendirmiştir. Yapılan tartışmalardan sonra, A ve B mağazaları her DVD için belli bir ücrete ek olarak depozito ücreti talep ettiklerinden, denklemlerin $y = mx + n$ formunda; C mağazası ise sadece her DVD için ücret talep ettiğinden, $y = mx$ formunda bir denklem yazmak gerektiğine karar veren öğrenciler, denklemleri doğru bir şekilde yazmışlardır. Bazı öğrenciler, her bir mağazaya ödenecek ücreti daha net görebilmek için bir tablo düzenlemişlerdir. Bartu da tablo düzenleyerek, üç mağazaya ödenecek ücret ve DVD sayısına ait kuralı bulmuştur. Daha sonra soruda istenen mağazalara ait DVD sayısı ve ücret ilişkisini gösteren denklemleri yazmıştır.

1. Her bir mağazanın talep ettiği fiyat ve DVD sayısını gösteren denklemleri oluşturunuz.

A	B	C
11	12	5
17	20	10
23	23	15
29	30	20

Handwritten equations on the left: $6x + 5 = y$, $3x + 14 = y$, $5x = y$. Below the table, the equation $6n + 5 = 30 + 14$ is written.

Şekil 31. Bartu'nun çalışma kâğıdı

Düzenlediği tabloyu ve yazdığı denklemleri inceleyen Bartu, tablodaki ilişkilere dair bulduğu kurallarla yazdığı denklemlerin aynı olduğunu fark ederek “bulduğumuz kuralla yazdığımız denklemler aynı oldu. Kuralda n yazmışız, denklemden n yerine x yazıp y 'ye eşitlemişiz.” şeklinde ifade etmiştir. Herhangi bir tablodaki ilişkilere dair bir kural bulma ile bu ilişkileri cebirsel olarak denklem halinde göstermenin aynı şey olduğunu fark eden Bartu, bu durumu arkadaşlarıyla paylaşmıştır. Bunun üzerine diğer öğrenciler de tablodaki örüntüye ait kural ile yazılan denklemler arasındaki benzerliği fark etmişlerdir.

A: Herhangi bir tablodaki örüntünün kuralını bulunca, bulduğumuz kural neyin kuralıydı?... ne ile ne arasındaki kuraldı?

Ali: Verilen değişkenler neyse onlar arasındaki ilişkinin kuralıydı. Mesela ilk günlerde yaptığımız örüntü kuralını bulurken adım sayısına göre belirliyorduk kuralı. Burada da DVD sayısı ile ücret arasındaki ilişkiye göre belirledik.

Bartu, tabloda bulduğu örüntülerin kurallarıyla denklemlerin biçimsel özelliğini ilişkilendirmiştir. Araştırmacının sorusu üzerine Ali de örüntü kuralı bulma ile ilgili görevlerle geri ilişkilendirme yaparak, aslında örüntü kuralı bulurken de denklem yazarken de verilen değişkenler arasındaki ilişkiyi, cebirsel olarak ortaya koyduklarını ifade etmiştir. Böylece ayrıntıları uzaklaştırarak genişletmiştir. Bunun üzerine herhangi bir örüntüye ait bir kural belirlendiğinde, mesela $3n+1$ gibi, her ne kadar tek değişken var gibi görünse de n yerine herhangi bir değer verince bulunan sonucun, o örüntüde n . değere karşılık gelen sonuç olduğu belirtilmiştir. Bulunan örüntü kuralının, o örüntünün n . değerine karşılık gelen sayıya eşitlendiğinde ise bunun, denklem olduğu ifade edilmiştir. Yani hem örüntü kuralı bulurken hem denklem yazarken, iki değişken arasındaki ilişkinin incelendiğini fark etmeleri sağlanmıştır. Öğrencilerin “ilginç” olduğunu ifade ettikleri bu ilişkiyi fark etmeleri de daha önceden belirtildiği gibi çalışmanın amaçlarından biri olarak belirlenmiştir.

Hangi mağazadan alışveriş yapılacağına ilişkin olarak öğrenciler, 7 DVD aldıklarında B ve C mağazasının eşit fiyatlar istediklerini, 7 DVD üzeri için B mağazasının daha kârlı olduğunu ifade etmişlerdir. Bu bilgiye nasıl ulaştıkları sorulduğunda devam ettirerek

genişletmişler ve düzenledikleri tablodaki bilgileri yorumlayarak 7 DVD'nin kendi tabirleriyle "sınır" olduğunu belirtmişlerdir.

A: Peki sizin tabirinizle 'sınır' 7 değil de 100 olsaydı, o zaman 100'e kadar bütün sayıları denememiz lazımdı. Bunun daha kısa ve mantıklı bir yolu ne olabilir?

Öğrenciler, bu soru üzerinde tartışmışlar ve çeşitli çözüm yolları üretmişlerdir; sayıları teker teker değil de 10'ar 10'ar arttırarak denemek gibi. Araştırmacı,  ğrencilerin düşüncelerini yönlendirmek için 3 denklemin grafiğini tahtaya çizerek doğruların keşişim noktasının ne anlama geldiğini sormuştur. Melike, keşişim noktalarının "aynı x için, aynı y değerini" gösterdiğini ifade etmiştir. Bunun  zerine Oğuz, "Denklemlerin ortak çözümlerini bulursak, kaç DVD için eşit fiyat  dediğimizi buluruz. Mesela 7'yi denklemlerde yerine yazarsak A mağazasına 47 lira, B mağazasına ve C mağazasına da 35 lira  deriz." Melike, benzer ilişki araştırarak doğruların keşişim noktasında her iki doğrunun da aynı x ve y değerlerini aldığını belirtmiştir. Bunun  zerine Oğuz da devam ettirerek genişletmiş ve keşişim noktasının her iki denklemi de ortak   z k olarak elde edilebileceğini ifade etmiştir. Öğrenciler, gerekli işlemleri yaparak soruda istenen bilgilere ulaşmışlardır.

Naz ve Nilay'ın yarıştığı görevle ilgili olarak (Görev 35),  ğrenciler öncelikle yarışmacıların hızları hakkında bilgi sahibi olmak için tablodaki uzaklık ve zaman değerleri arasındaki farkları incelemişlerdir.

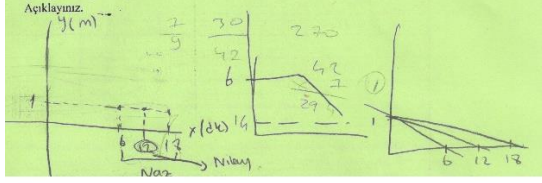
Sezen: Zaman arasında hep 2 fark var. Ama uzaklık değerleri aynı değil sanki.

Melike: 7. dakikaya kadar uzaklıklar arasındaki farklar sabit ama sonrasında azalmış. Başta oran 6 iken, sonra 4'e düşmüş. Hızı mı azalmış?

G l: Hızı azalmış olamaz. Çünkü o zaman bunu tek bir doğruda gösteremeyiz.

Öğrenciler, tablodaki değerler arasındaki farkların sabit olmadığını belirterek, 7. dakikadan sonra uzaklık-zaman değerleri arasındaki farkların oranının azaldığını ifade etmişlerdir. Melike, uzaklık-zaman değerleri arasındaki farkların oranının hızı verdiği bilgisini kullanarak, ayrıntıları uzaklaştırarak genişletmiştir. Öğrenciler, yarışmacının hızının azaldığı konusunda hem fikir olduktan sonra, bunu tek bir doğru şeklinde nasıl gösterecekleri üzerinde tartışmışlardır. Daha sonra yarışmacının, 7. dakikaya kadar $y=6x$, sonrasında ise yorulmuş olabileceği için hızını düşürerek $y=4x+14$ denklemine göre hareket ettiğini ifade etmişlerdir.

İki yarışmacıya ait eldeki üç denklemin doğrularını çizme konusunda ortaya değişik grafikler çıkmıştır. Örneğin;



Şekil 32. Elif'in çalışma kâğıdı

A: Bu grafikleri bize anlatır mısın?

Elif: Üç tane doğru var, ikisi bir kişiye ait. Ben de üç denkleme göre noktaların nasıl değiştiğini görmek için 1 değerini verdim, o zaman denklemler 6, 12, 18 değerlerini aldı. Aralarında 6 fark var ama bu bana ne verdi bilmiyorum. İlk grafiği o yüzden çizdim. İkinci grafiği Naz'ın ilk hızı 6, sonra 4'e düşmüş, yani hız-zaman grafiği çizdim. Üçüncü grafikte de x yerine 1 verince bulduğum değerleri doğru ile birleştirdim.

Elif, denklemler arasında benzer örüntü araştırarak, üç denklemde de x yerine 1 verdiğinde, y değerlerinin nasıl değişeceğini görmek istemiştir. Ancak amaçsızca yaptığı bu işlemde elde ettiği değerlerden yola çıkarak bir ilişki bulamamıştır. O yüzden Elif'in bu eylemi, benzer örüntü araştırma kategorisinde incelenebilir. Eğer daha amaçlı bir işlem sonucunda elde ettiği ilişkiyi yorumlasaydı, o zaman bu eylem benzer ilişki araştırma olarak değerlendirilebilirdi. Öğrenciler, Naz'ın $y=6x$ denklemine göre yarışa başladığı için önce o doğruyu çizmeleri gerektiğini, sonra ise yarışmacı hızını düşürdüğünden doğrunun kırılarak $y=4x+14$ denkleminin doğrusunun çizilmesi gerektiğini ifade etmişlerdir. Böylelikle benzer ilişkiyi araştırdıktan sonra ayrıntıları uzaklaştırarak genişletmişlerdir.

Kaçıncı dakikada Naz'ın başlama çizgisine 96 m uzakta olduğu sorulduğunda ise bütün öğrenciler, $y=4x+14$ denkleminde y yerine 96 değerini koyup buldukları sonucun, aradıkları değer olduğunu ifade etmişlerdir.

A: Naz 10 dakika boyunca $y=4x+14$ denklemine göre mi hareket ediyor?

Ezgi: 7. dakikada hızını düşürüyor ya, ondan önce $y=6x$ denklemine göre hareket ediyor.

A: O zaman ilk 7 dakika boyunca Naz $y=4x+14$ denklemine göre hareket eder gibi işlem yapınca, doğru mu yapmış olduk?

...

Ali: O zaman ilk 7 dakika $y=6x$ denklemine göre hareket ettiğinden 42 metre yol almış olur. Ama sonra yoruldu, hızı düştü, geriye 54 metre yol kaldı. İşte onu $y=4x+14$ denklemine göre gidecek. Bu denklemi 54'e eşitlersek, x 'i 10 buluruz. 10 dakikada gitmiş.

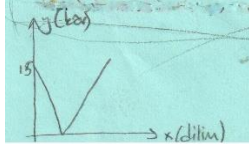
Oğuz: Hayır, 10 dakikada 54 metre gitmiş, ondan önce de 7 dakikada 42 metre gitmişti. Toplam 17 dakika eder.

Öğrenciler, yarışmacının 96. metrede $y=4x+14$ denklemine göre hareket ettiğinden, y yerine istenen değeri koyup işlemlerini sürdürmüşlerdir. Ancak gözden kaçırdıkları nokta, ilk 7 dakika boyunca yarışmacının $y=6x$ denklemine göre hareket ettiği, sonrasında ise hızını düşürerek $y=4x+14$ denklemine göre hareket ettiğidir. Dolayısıyla ilk 7 dakika, 42 m yol aldıktan sonra geri kalan 54 metreyi de $y=4x+14$ denklemine göre alacaktır. Bu durumu fark eden Ali ve Oğuz, işlem yaparak ve ayrıntıları uzaklaştırarak genişletmişlerdir. 10. dakikada yarışmacılar arasında kaç metre fark olacağı sorulduğunda ise bir önceki soruyla ilişki kurarak, Naz'ın ilk 7 dakika 42 metre yol almış olmasından dolayı, geri kalan 3 dakikada 26 metre yol alacağını ve toplamda 68 metre yol alacağını ifade etmişlerdir. Diğer yarışmacı da 10 dakikada 57 metre almış olacağından, bu iki değeri birbirinden çıkararak sonucu bulmuşlardır. Böylece, öğrencilerin yaptıkları eylemler, devam ettirerek ve işlem yaparak genişletme kategorisinde incelenebilir.

Öğrenciler, börek satışına dair elde edilen kârın sorulduğu soruda (Görev 33) öncelikle verilen denklemleri inceleyerek doğrulukları hakkında yorum yapmışlardır. Öğrencileri, Sinem ve Didem'in denkleminin, "börek diliminin maliyetini hesaba katmadığı" için; ayrıca Sinem, "75 kuruşu liraya çevirmediği" için; Ela'nın denkleminin, "giden paradan gelen parayı çıkardığı" için; Eda'nın denkleminin ise "lira ve kuruşları birbirine çevirmediği" için yanlış olduğunu belirtmişlerdir. Elde edilen kâr ve satılan börek sayısını doğru bir şekilde göstermek için nasıl bir denklem yazmak gerektiği ile ilgili olarak Gül, yazdığı denklemi " y kâr ve x de satılan börekler olmak üzere giderleri gelirlerden çıkarır, $y=75x-15+10x$ yazarım. Ama böyle yapınca $10x$ 'i eklemiş oldum. O zaman paranteze alır, hepsini çıkarırım, $y=75x-(15+10x)$ olur." şeklinde ifade etmiştir. Koray'ın "bu yazılan denklemlerde bazısı lira, bazısı kuruş" olduğu için yanlış olduğunu ifade etmesi üzerine Gül, denklemdeki paraları lira cinsinden yazarak denklemi $y=0,75x-(15+0,10x)$ olarak düzenlemiştir. Böylece, gelir ve gider paraları arasında benzer sonuç araştırarak genişletmiştir. Bunun üzerine Ali ise "bir dilim börekten 75 kuruş kazanıp 10 lira kaybediyorum. Yani bir dilim börekten 65 kuruş kâr elde ediyorum. $0,65x$ 'ten 15 lira kira parasını çıkarırsam, elde ettiğim kârı verir bana. Denklem de $y = 0,65x - 15$ olur" diye

düşünmüştür. Ali, bir önceki denklemdeki çıkarma işlemini yaparak, o denklemle aynı olan bir denklem elde etmiştir. Dolayısıyla yaptığı işlem, devam ettirerek genişletme kategorisinde incelenebilir.

Bu denklemin doğrusunu çizme ile ilgili olarak Ezgi, “börek sayısı arttıkça kâr elde edeceğiz. Bu yüzden kârımız bir süre sonra 0 olur, sonra artmaya devam eder” diyerek aşağıdaki grafiği çizmiştir.



Şekil 33. Ezgi'nin çalışma kâğıdı

Oğuz: Bence böyle olmaz. Çünkü burada başta kâr ediyormuş sonradan kârı azalmış gibi görünüyor. Ama bizim denklemimizde börek sayısı artıyor ama kâr en başta eksiye oluyor.

Ezgi: y'yi nerede göstereceğim o zaman?

Ali: y değeri eksi ama. 0'ın aşağısında göstereceğiz y eksenini kestiği noktayı.

(Ezgi tahtada (0, -15) noktasından başlayarak artan bir doğru çizer)

Ezgi: Anladım. x eksenine geldiğinde kârın 0 olduğu yer oluyor. Az önce bulmuştuk. x, 23,7 iken y, 0'dı. Buradan sonra da kâra geçiyoruz zaten. Hep artıyor.

Ezgi, denklemi tam olarak yorumlayamadığından ilk başta zarar ettiğini, satılan börek sayısı bir noktaya geldikten sonra kâr elde edilmeye başlandığını grafikte gösterememiştir. Ayrıca denklemdeki 'n' değerinin de işaretini dikkate almadığından, doğrusunu (0,15) noktasından başlatmıştır. Hâlbuki bir önceki soruda 23. dilime kadar kâr elde edilmeyeceği, o noktaya kadar zarar edileceği üzerinde konuşulmuştu. Hatasını düzelterip doğrusunu (0,-15) noktasından başlattıktan sonra, bir önceki soruyla ilişkilendirerek börek sayısı 23,7 iken gelir ve giderin eşit olduğunu ifade etmiş, böylece ayrıntıları uzaklaştırarak genişletmiştir.

Ceren'in hangi tarifeyi seçmesi gerektiği ile ilgili soruda (Görev 35) öğrenciler, birinci ve ikinci tarifeyle ilişkin denklemleri cebirsel olarak ifade etmekte sorun yaşamamışlardır; $3x+5y=72$ ve $2x+6y=72$. Ancak yazdıkları bu denklemde, öğrencilerin birimlere dikkat etmeden denklemi yazdıkları görülmektedir. Bunun üzerine Ali, kendi yazdığı denklemlere ilişkin “birinde kuruş cinsinden vermiş, birinde lira cinsinden. O yüzden tek birimde toplamak lazım olduğundan o denklemleri 7200 kuruşa eşitledim ben.” açıklamasını

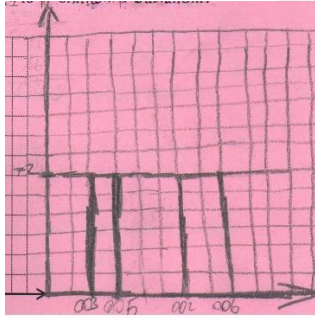
yapmıştır. Tahtaya $3x+5y=7200$ ve $2x+6y=7200$ denklemlerini yazarak, ayrıntıları uzaklaştırarak genişletmiştir.

Bu tarifelere ilişkin grafikleri çizme konusunda öğrenciler, bağımlı ve bağımsız değişkenlerin tanımından yola çıkarak karar vermeye çalışmışlardır. Bağımsız değişkenin kendi tabirleriyle ‘kafasına göre hareket ettiği’ ve bağımlı değişkeni etkilediğinden yola çıkarak mesajlaşmanın mı konuşmayı etkilediği, konuşmanın mı mesajlaşmayı etkilediği konusunda tartışmışlardır.

Koray: Bağımlı bağımsız konusuna takıldım ben. x’e zaman dedim, y’ye de para dedim. Ama 72’yi nereye yazacağım bilmiyorum. x’e zaman deyince para 2 kuruş, 3 kuruş olarak tarifelere göre değişiyor ya, zaman arttıkça para da etkileniyor sonuçta.

Ali: 4 tane değişkeni (her bir tarifeye ait mesajlaşma ve konuşma dakikası) ayrı ayrı mı göstereceğiz? Ya da hepsi bağımlı olduğundan hepsini y ye yazalım.

Melike: Ben öyle yaptım zaten.



Şekil 34. Melike’nin kâğıdı

Öğrenciler, mesaj sayısı, konuşma dakikası ve 72 lirayı grafik üzerine nasıl yerleştirmeleri gerektiği ve hangisinin diğerini etkilediği konusuna karar vermekte zorlanmışlardır. Melike’nin, y eksenine paralel çizdiği doğrular ile y ekseninde (0,72) noktasından itibaren x eksenine paralel çizdiği doğru görülmektedir. Böylece, bu doğruları kesiştirmiş ve sabit 72 lira ücreti göstermek istemiştir. Mesaj sayısının ve konuşma dakikasının birbiriyle ilişkili olarak artıp azalan değişkenler olduğunu ve 72 liranın da sabit olduğunu fark etmeleri zaman almıştır.

Oğuz: Bence 2 çizgi olması lazım.

...

Bartu: 72 lirayı zorunlu olarak verecekler. O sabit para. Mesaj ve konuşma paraları da birbirinden etkileniyor, biri arttıkça biri azalacak ama toplamı 72 lira olacak.

...

Gül: Hani yazdığımız denklem var ya $3x+5y=7200$, bunu şöyle yazarsak $5y=7200-3x$. Diğerini de aynı şekilde yazar y'yi yalnız bırakırsak, bizim bildiğimiz denklemlere benzer... Sonra eksenleri kestiği noktaları buluruz ve çizeriz doğruları.

Gül, önceki sorularda da yaptığı gibi gösterimler arasındaki benzerliği ilişkilendirerek yazılan denklemi daha iyi bildikleri şekilde yazmıştır. Yazdığı bu iki denklemin aynı denklemler olmasından yola çıkarak, benzer prosedür araştırmış ve denklemin grafiğini çizmiştir. Daha sonra öğrenciler, bu doğruların kesişim noktasının da aynı sayıda mesaja karşılık aynı süre konuşma noktası olduğunu ifade etmişlerdir.

4.2. Öğrencilerin Genelleme Süreçlerine İlişkin Anlama Yolları

Kişinin zihinsel eylemlerinin sonucunda ortaya koyduğu her türlü ürün, zihinsel eylemin anlama yolu olarak ifade edilmektedir. Buna göre bir problemin çözümü ya da bir ispat da problem çözme ve ispatlama eylemlerinin anlama yollarını oluşturmaktadır. Araştırmanın bu bölümünde, öğrencilerin genelleme eylemleri sonucunda oluşturdukları anlama yolları belirlenmiştir. Genelleme eylemi sonucunda oluşan ürünleri işaret eden yansıma genellemeleri, öğrencinin ortaya koyduğu ürüne göre çeşitli kategorilere ayrılmaktadır. Yansıma genellemelerine göre öğrencinin yazılı ve sözlü olarak ifade ettiği genelleme ürünleri açıklama ya da ifade etme, tanım ve etki kategorilerinde incelenmektedir. Yansıma genellemeleri, genelleme eylemleri ile oldukça ilişkilidir. Bu bölümde açıklanmış olan yansıma genellemeleri bir önceki bölümde ayrıntılı olarak ele alınan ilişkilendirme, araştırma, genişletme kategorilerine göre ele alınmış, eğer varsa her bir genelleme eyleminden örnekler verilmiştir.

4.2.1. Açıklama ya da İfade Etme

Öğrenciler, genelleme süreci sonunda genelleme ürünlerini olayların, özelliklerin, objelerin benzerlik ifadeleri; genel kural, örüntü, strateji ya da evrensel kural olarak ortaya koyabilirler.

4.2.1.1. Devam Eden Fenomenin Açıklanması

Öğrenciler, genelleme ifadelerinde verilen durum hakkında devam eden bir özellik hakkında açıklama yapabilirler. Örneğin; çevresi 18 birim olan dikdörtgenin kısa ve uzun kenarına ait uzunlukların grafikte gösterildiği soruyla ilişkili olarak öğrenciler, bu kenarlara ait olası uzunlukları belirledikten sonra bu noktaları grafikte göstermişlerdir. Daha sonra bu noktalar arasındaki her x ve y değerinin bu denklemi sağladığını belirterek bu noktaları bir doğru boyunca birleştirmişlerdir.

Mumun erimesi sorusuyla ilgili olarak tabloyu inceleyen Bartu, “mum yakıldığında 20 cm imiş, 1 dakika sonra 18 cm kalmış, 2 cm erimiş. 2 dakika sonra 16 cm kalmış, yine 2 cm erimiş. Bu hep böyle olmuş. 1 dakikada 2 cm erimiş” şeklinde ifade etmiştir. Bu ifadelerde değişkenler arasında devamlılık bildiren, sabit olmayan dinamik bir ilişki vardır. Dolayısıyla devam eden bir fenomenin açıklanması kategorisinde değerlendirilmiştir.

4.2.1.2. Benzerlik İfade Etme

Öğrenciler, genelleme eylemlerinin ürünü olarak iki durum, problem, obje arasındaki benzerlikten yola çıkarak bu benzerliği ifade edebilirler. Burada benzer olarak ifade edilen problem ya da durum, öğrencinin gözünden benzer olan problem ya da durumlar arasındaki benzerliğin ifade edilmesidir. Öğrencinin odağında olan problem ya da durum; benzer özellik, obje ya da gösterim, durumlar arasında kurdukları benzerliğin ifadesi olarak karşımıza çıkmaktadır.

Benzer Özellik İfadesi: Selin ve Burak’ın hızlarının karşılaştırıldığı soruda öğrenciler, grafiği ve tabloyu incelemişlerdir. Daha sonra Gül, grafiği inceledikten sonra Selin’in hızı ile ilgili olarak, “şurada küçük üçgen var, burada da büyük üçgen var. Bunlar benzer üçgenler olurlar. Küçük üçgende bir kenar 2, bir kenar 3. Büyük üçgende de bir kenar 8, bir kenar da x olsun. 2’nin 3’e oranı, 8’in x’e oranına eşit olur. O zaman burası 12 olur. 10/15’ten 2/3 olmuş eğimi yani hızı” şeklinde açıklama yapmıştır. Gül, benzer üçgenlerin özelliğinden yola çıkarak doğrunun eğimini bulmuş ve yarışmacının hızı hakkında yorum yapmıştır.

“Feyza 10 saniyede 16 m yol almışsa, Feyza ile eşit zaman aralıklarında eşit miktarda yol alan Melike’nin bazı zamanlarda almış olabileceği yol” ile ilgili çeşitli ihtimaller belirtilmiştir. Bunların neye göre yazıldığı sorulduğunda ise söyledikleri bütün sayıların,

10 ve 16 sayılarının aynı sayı ile çarpılıp bölünmesinden elde edildiğini ifade etmişlerdir. Bu örneklerde görüldüğü gibi öğrenciler, iki durum arasındaki benzerliği ifade ederek bir genellemeye ulaşmışlardır.

Obje ya da gösterimlerin benzerliğinin ifadesi: Öğretim deneyinin ilk günlerinde verilen örüntülerin kuralını bulmayla ilgili olarak Ali, Bartu ve Oğuz, ' $3n+1$ ' olan örüntü kuralının aynı zamanda ' $(9n+3)/3$, ' $(12n+4)/4$, ' $(15n+5)/5$, ' $(18n+6)/6$ ' olarak yazılabileceğini belirtmişlerdir. Neden böyle yaptıkları sorulduğunda ise Oğuz, ' $3n+1$ 'i aynı sayıyla çarpıp bölmenin sonucu değiştirmeyeceğini, bu gösterimlerin benzer kuralı ifade ettiğini belirtmiştir.

Hangi mağazadan DVD kiralanacağı ile ilgili olan soruda öğrenciler, DVD sayısına göre mağazaların talep ettiği ücretleri gösteren bir tablo düzenlemiş ve tablodaki ilişkilere dair kurallar bulmuşlardır. Bu ilişkileri denklemler halinde gösterdikten sonra, tablodaki örüntü kurallarıyla denklemlerin benzer obje olduğunu fark etmişlerdir. Böylece tablodaki değişkenlere ait ilişkinin kuralını bulmanın ve bu ilişkiyi denklemle ifade etmenin aynı şey olduğunu belirtmişlerdir.

Burak ve Selin'den kimin daha hızlı yürüdüğünün sorulduğu soruda Gül, Selin'in doğrusunun denklemi ile ilgili olarak, doğru orijinden geçmediği halde bir önceki soruyla benzer durumlar olduğunu ifade ederek denklemi $y = \frac{2}{3}x$ olarak yazmıştır. Arkadaşları, doğrunun orijinden geçmediğini hatırlatması üzerine, doğru orijinden geçmiyorsa y'nin katsayısı olması gerektiğini düşünmüş ve denklemini $2x = 3y$ şeklinde yazmıştır. Gül'ün ilk yazdığı denklemle sonradan yazdığı denklemin, benzer gösterimler olduğu görülmektedir. Selin'e ait denklemin sınıfça tartışılıp doğru bir şekilde ifade edilmesinden sonra, denklem $y = -\frac{2}{3}x + 10$ olarak yazılmıştır. Bunun üzerine Gül, aynı denklemin bir başka ifadesi olan " $3y = 30 - 2x$ " şeklinde de yazılabileceğini belirtmiştir.

Denklemlerin doğrusunu göstermekte bir sorun yaşamamaları için öğrencilere, örneğin; $y = x$, $y = 2x$, $y = 3x$ şeklinde denklemler verilmiş, bu denklemlerde x'in aldığı değerlere karşılık y'nin alacağı değerleri tabloda göstermeleri istenmiştir. Daha sonra bu değerleri grafikte işaretleyerek denklemlere ait doğruları çizmeleri beklenmiştir. Burada amaçlanan verilen denklemlerin tablodaki değerleriyle ilişkilendirme yaparak doğruları çizmeleri ve denklemin, tablonun ve doğrunun aynı şeyi gösterdiğini fark etmelerini sağlamaktır. Bu açıdan düşünüldüğünde uygulanan öğretim deneyi sürecinde öğrencilerin, verilen bir tablodaki değişkenlerin birbiri ile olan ilişkisini sözel olarak ifade etmeleri, bu

ilişkiyi denklemle cebirsel olarak ifade etmeleri, bu denklemin doğrusunu çizerek değişkenlerin birbirine göre değişimini grafikte ifade etmelerinin benzer gösterim ifadeleri olduğunu kavradıkları söylenebilir. Dolayısıyla bu çoklu gösterimler, benzer gösterim ifadeleri olarak kodlanmış olup öğretim deneyi boyunca yapılan her genelleme ürününde, bu gösterimlerden en az birine ulaşıldığı belirtilmelidir.

Durumların benzerliğinin ifadesi: Sinemada koltukların yerlerini bulma ile ilgili soruda Gül, bu soruyla bir önceki sayı tablosu sorusunu benzetmiştir. Sayı tablosu sorusunda örneğin; 4'lük sayı tablosu üzerinde çalışırken en son sütunun kuralı $4n$ olduğu için o sütundan bir önceki sütun $4n-1$, iki önceki sütun $4n-2$, üç önceki sütun ise $4n-1$ olarak ifade edilmişti. Bu soruda da benzer şekilde en son sütunun kuralını $6n$ olarak almış ve ondan bir önceki sütunun kuralını $6n-1$, iki önceki sütunun kuralını $6n-2$ ve diğer sütunlara da aynı işlemi yaparak kurallarını bulmuştur. Ancak burada gözden kaçırdığı nokta, koltuklu soruda 5 sütun olduğundan sayı tablosu sorusunda uygulanan kuralın burada uygulanamayacağıdır. Ali de arkadaşının fikrini bu şekilde belirtmesi üzerine, bu noktayı da göz önünde bulundurmak gerektiğini ifade etmiştir.

Çevresinin uzunluğu 18 br olan dikdörtgenin olası kenar uzunluklarının tartışıldığı soruda, $[AB]$ 'nin eğimi ile ilgili olarak Ali, $[AB]$ hipotenüs olacak şekilde ABD dik üçgeni oluşturmuştur. Daha sonra ABD açısının tanjantı, eğimi vereceğinden karşı dik kenarın, komşu dik kenara oranını alarak eğimi ifade etmiştir. Bu soruyu yanlış cevaplayan Elif, araştırmacının $[BC]$ 'nin eğimini sorması üzerine bu durumların benzer durumlar olmasından yola çıkarak $[BC]$ hipotenüs olacak şekilde bir dik üçgen oluşturmuş ve karşı dik kenarın, komşu dik kenara oranını alarak soruyu doğru bir şekilde cevaplamıştır.

Mumun boyunun zamana göre değişimi ile ilgili olan soruda, tablodaki değerler grafik üzerinde nokta olarak gösterilmiştir. Daha sonra öğrencilere, bu noktaların bir doğru ile birleştirilip birleştirilmeyeceği sorulmuştur. Bunun üzerine öğrenciler, çokgenlerin çevrelerinin grafikte gösterildiği soruyla ilişkilendirme yapmışlar ve “dünkü soruda da yapmıştık; ama dünkü soruda yarım çevre olamayacağından o noktaları birleştiremeyiz dedik. Ama burada yarım dakika da yarım çevre de olabileceğinden, bu noktaları birleştirebiliriz” şeklinde ifade etmişlerdir. Dolayısıyla durumların benzerliğini ifade ederek bir sonuca gitmişlerdir.

4.2.1.3. Genel Prensip İfade Etme

Öğrenciler, yaptıkları genellemeler sonucunda ifadelerini üzerinde çalıştıkları durumların ötesine taşıyarak bu durumlar hakkında genel kural, örüntü, strateji, prensip ifade edebilirler. Bu şekilde ulaşılan genellemeler, bir de cebirsel formda ifade edildiklerinde, matematikçiler tarafından en çok kabul gören genellemeler olmaktadır. Öğrencilerin buldukları genel kural, genel örüntü, genel strateji ve global kural genel prensip ifadesi olarak değerlendirilmektedir.

Genel örüntü ifadesi: Örneğin; öğretim deneyinin ilk gününde Oğuz'un birinci görevde verilen örüntü kuralı ile ilgili olarak “şu bir kareyi sabit alırsak, diğer sütunlar her terimde artıyor. Her terimde adım sayısı kadar üçlü bloklardan var” ifadesi terimler arasında artarak devam eden bir olayın açıklanması olarak ele alınabilir.

Mumun boyunun zamana göre değişimini veren tablodaki örüntülerle ilgili olarak öğrenciler; zaman sütunu içinde, boy uzunluğu sütunu içinde, zamana göre boy ilişkisini de kendi içinde analiz etmişlerdir. Buna göre şekil 20’de Sezen’in çalışma kâğıdında görüldüğü gibi değişimleri incelemişler ve sonunda mumun yarım dakikada 1 cm, 1 dakikada 2 cm kısaldığını ve bunun tablodaki tüm değerler için geçerli olduğunu ifade etmişlerdir.

Öğretim deneyinin ilk günlerinde tablodaki sayılar arasındaki ilişkinin incelendiği (geometrik dizi olan) görevle ilgili olarak öğrenciler, öncelikle terimler arasında 10, 60, 360 fark olduğunu ifade etmişlerdir. Daha sonra bunun düzenli bir artış olmamasından dolayı başka bir durum düşünerek her terimin bir önceki terim ile 6 sayısının çarpılması ile elde edildiğini fark etmişlerdir.

Genel kural ifadesi: Öğretim deneyinin ilk günlerinde verilen bazı örüntülerin şekillerinin tamamlanarak içindeki kare sayısından bir kural bulmayla ilgili olan soruda Ali, “dikdörtgenin içinde kareler var ya onların kenarları 1 birim. O zaman birinci şeklin uzun kenarı 3 birim, kısa kenarı 2 birimdir. Diğerlerinde de aynı şekilde... Dikdörtgenin içinde minik karelerden var gibi düşünüp alanını bulmuştuk.” şeklinde açıklama yapmıştır. Böylece Ali, dikdörtgensel bölgenin alanının, içindeki birim kare sayısına eşit olduğunu ifade ederek genel bir kural ifadesine ulaşmıştır.

Çevre uzunluğu 18 br olan dikdörtgenin kenarlarının uzunluklarının alabileceği olası değerler ile ilgili olarak öğrenciler, kuralı sağlayan sayı çiftlerini (1,8), (2,7), (3,6), (4,5) olarak belirlemişlerdir. Ali, daha genel düşünerek kenarlardan biri x, diğeri y olmak üzere

$2x+2y=18$ ise $x+y=9$ olarak bir kural bulmuş ve bunu “toplamı 9 olan tam sayılar” şeklinde ifade etmiştir.

Öğretim deneyinin ilk günlerinde tablodaki sayılar arasındaki ilişkinin incelendiği (aritmetik dizi olan) görevle ilgili olarak öğrenciler, terimler arasında ilişki araştırmışlardır. Daha sonra terimler arasındaki farkı 6 olarak bulmuşlardır. Bir de adım sayısı ve terim arasında 5 fark olduğunu bulmuşlar ve bu farklara dair $6n-2$ ve $5n-2$ kurallarını belirtmişlerdir. Ancak buldukları bu kuralların ne ile ilgili kurallar olduğunu, hangisinin kendi aradıkları kural olduğunu bilememişlerdir. Elde ettikleri bu kurallar arasında ‘n’ fark olduğunu, adım sayısına artış miktarı olan $5n-2$ eklediklerinde terimi yani $6n-2$ ’yi elde ettiklerini belirtmişlerdir.

Genel strateji ya da prosedür ifadesi: Şekillerin sayıları ile çevre uzunlukları arasındaki ilişkinin grafikte gösterildiği soru ile ilgili olarak Sezen, “mesela 3 beşgenin çevresi(nin uzunluğu) 15, $15/3=5$. 3 karenin çevresi(nin uzunluğu) 12, $12/3=4$. 3 üçgenin çevresi(nin uzunluğu) 9, $9/3=3$. O zaman beşgenin eğimi 5, kareninki 4, üçgeninki 3 oluyor” şeklinde açıklama yapmış ve bunun tesadüf olduğunu düşünmüştür. Bunun üzerine Elif, “üç şekil üzerinden düşünersek eğer, hepsinde bölü 3’ler aynı oluyor. O zaman y’si daha çok olanın eğimi daha fazladır. Beşgenin y’si daha çok olduğu için eğimi de daha fazladır” şeklinde açıklama yaparak eğer paydaları sabitse, bir oran söz konusu olduğundan payı büyük olanın eğiminin de büyük olacağını belirtmiştir.

“Feyza 10 saniyede 16 m yol almışsa, Feyza ile eşit zaman aralıklarında eşit miktarda yol alan Melike’nin bazı zamanlarda almış olabileceği yol” ile ilgili olarak öğrenciler çeşitli fikirler öne sürmüşlerdir. Bu sayıları neye göre belirledikleri sorulduğunda ise Koray, “10 saniyede 16 m yol almışsa, hepsinin yarısını alırsam 5 saniyede 8 metre yapar. Şimdi bu (5,8) sayısını istediğim sayıyla çarpıp ya da bölersem, Melike’nin bazı zamanlarda aldığı yolu bulurum” şeklinde açıklama yapmıştır. Böylece Koray, en küçük sayı çiftini belirleyerek bu sayıları herhangi bir sayı ile çarpıp bölünce istenen sayı çiftlerine ulaşılabilirliğini belirtmiştir. Dolayısıyla Koray, herhangi bir objeye bağlı kalmadan daha genel bir strateji belirlemiştir.

‘Ters c’ örüntüsünde her bir adımdaki kare sayısını belirlemek için öğrenciler, her şekle kare ekleyerek kapalı bir şekil elde etmeyi düşünmüşlerdir. İlk şekle 1 kare, ikinci şekle 2 kare, üçüncü şekle 3 kare ekleyerek bütün şekilleri dikkörtgen haline getirmişlerdir. Daha sonra dikkörtgenlerdeki kare sayısını bulup, bu şekillere eklenen kareleri çıkararak terimlerdeki kare sayısını bulmayı amaçlamıştır. Bunun nasıl yapılacağı ile ilgili olarak

Ali, karelerin bir kenarını 1 birim kabul ederek dikdörtgenlerin içindeki kare sayılarının bulunacağını belirtmiştir, dolayısıyla dikdörtgensel bölgenin alanının içindeki birim kare sayısına eşit olduğunu ifade etmiştir.

Global kural ifadesi: Tablo halinde bazı çokgenlerin verilip ilişkilerin araştırıldığı soruda, bir çokgene ait köşegen sayısını Ali, “Beşgenin beş köşesi var. Bir köşesi kendisi, kendi kendine köşegen oluşturamaz, yanındaki iki köşeyle de köşegen oluşturamaz. Bir köşeden iki köşegen çizebiliriz yani, 5 köşeden toplamda 10 köşegen eder. Hepsini iki kez saydığımız için 2’ye bölüyoruz; 5” şeklinde açıklamıştır. Ali, muhakeme ederek aslında köşegen sayısının kombinasyon yardımıyla bulunmasını anlatmıştır.

Zamana göre alınan yolun değişiminin incelendiği tabloda öğrenciler, değişkenlere ait farkların oranının dolayısıyla eğimin sabit olduğunu ifade etmişlerdir. Eğimin, x ’de meydana gelen her birim değişim için, y ’de meydana gelen değişim olmasından yola çıkarak hızın, x ekseninde değişim 1 br olduğunda, y ekseninde meydana gelen değişim olduğu bilgisine ulaşmışlardır.

Doğruların eğimlerinin incelendiği grafik sorusunda öğrenciler ilk doğruda bulunan $[AB]$ ve $[BC]$ doğru parçalarının eğimlerini eşit bulmuşlardır. Oğuz, bu durumu “... x eksenine paralel çizip BCD dik üçgeni oluştursak, o nokta da D olsun mesela. O zaman bu ikisi birbirine eş üçgenler olmaz mı? O zaman BAO açısı ile CBD açısı aynı olur. O zaman tanjantları da yani eğimleri de aynı olur” (şekil 16) diyerek açıklamıştır. Dolayısıyla “doğru boyunca eğim değişmez” kuralına ulaşmışlardır.

4.2.2. Tanım

Öğrenciler, genelleme eylemlerinin ürünü olarak üzerinde çalıştıkları örüntü, objeler sınıfı ya da ilişkiye ait temel özellikleri ifade ederek tanımlama yoluna gidebilirler. İlkokul ve ortaokul öğrencilerinin objeler sınıfı üzerinde düşünerek bir tanıma ulaşmaları zor görünse de burada bahsedilen tanım, matematiksel olarak tam ve doğru bir şekilde tanım ifadesi değildir. Üzerinde çalışılan örüntü, sınıf ve ilişkilerin öğrencinin fark ettiği kadarıyla temel özelliklerinin ifade edilmesi, bu kategoride incelenmektedir.

Tabloda verilen sayılar arasındaki ilişkinin araştırıldığı soruda öğrenciler, ilk tabloda verilen sayıların arasında belirli bir fark olduğunu ifade etmişler ve bunun aritmetik dizi olduğunu belirtmişlerdir. Sonrasında verilen tablodaki sayılar arasında da ortak fark belirlemeye çalışmışlar; ancak düzensiz artıştan dolayı ortak fark yerine, ortak orandan

bahsedilebileceğini ifade etmişlerdir. Dolayısıyla son örüntünün terimleri arasında ortak oran olduğundan, bunun geometrik bir dizi olduğunu söylemişlerdir. Ali, ulaşılan bu tanıma “terimler arasındaki fark sabitse aritmetik, oran sabitse geometrik olur” şeklinde ifade etmiştir.

Tablo halinde çokgenlerin kenar, köşegen sayıları arasındaki ilişkinin araştırıldığı soruda Melike, köşegenin ne olduğunu arkadaşlarına sormuştur. Bunun üzerine Bartu “bir köşeden diğer köşeye giden” şeklinde tanımlamış, Ali ise “bir köşeden bağlı olmadığı köşeye giden doğru parçası” şeklinde daha doğru bir tanım vermiştir.

Öğrenciler, Feyza’nın eve olan uzaklığının zamana göre değişiminin verildiği tabloda uzaklık değişimi ile zamanın değişimini inceleyerek bu farkların oranının sabit olduğunu ifade etmişlerdir. Farkların oranı ifadesiyle eğim arasında benzerlik kuran öğrenciler, birim zamanda alınan yoldan kastedilenin, bir saniyede alınan yol olduğunu fark etmişlerdir. Her saniyede aynı miktarda yol alınırsa sabit hızla yürüneceğini ifade eden öğrenciler, hem eğim ile hız arasındaki ilişkiyi fark etmişler hem de hızın tanımına ulaşmışlardır; “hız, birim zamanda alınan yoldur.”

4.2.3. Etki

Öğrenciler, genelleme eylemi sonucunda daha önceden edindiği bir genellemeyi, karşılaştığı yeni problem durumunda kullanabilmektedirler. Bu durum, iki şekilde karşımıza çıkabilmektedir; ya öğrenci önceden edindiği genellemeyi kullanarak yeni genelleme elde etmektedir ya da önceden edindiği genellemeyi yeni duruma uydurarak yeni bir genelleme elde etmektedir.

4.2.3.1. Önsel fikirlerin etkisi

Öğrencinin daha önceden oluşturduğu bilgisinin yeni problem durumunda kullanılarak bir genelleme oluşturulmasını ifade etmektedir. Araştırmacı, öğrencinin matematik geçmişi hakkında çok fikir sahibi değilse, önsel fikirlerin teşhisi zor olabilmektedir.

Eğimin ne olduğunun tartışıldığı derste öğrenciler, eğimin çeşitli anlamlarından bahsetmişlerdir. Oğuz ise eğimi “tanjant 30 veya 60” olduğunu ifade etmiştir. Neden böyle söylediği sorulduğunda ise sorularda bu şekilde yaptıklarını belirtmiştir. Oğuz, daha

önceden edindiği tanjant 30 ya da tanjant 60 değerinin eğimi verdiği bilgisini, burada kullanmıştır. Dolayısıyla önsel fikirlerin etkisi ile ifade etmiştir.

Yine eğim konusunda çalışırken “doğru sağa yatık olunca mı sola yatık olunca mı eğimi pozitif olur?” konusunda öğrencilerin kafası karışmıştır. Bazı öğrenciler, doğru sola yatık olunca eğiminin pozitif olacağını, bazı öğrenciler ise doğru sağa yatık olunca eğiminin pozitif olacağını belirtmişlerdir. Doğruların eğimi ile ilgili olan ilk soruda bazı öğrenciler, önsel fikirlerinin etkisiyle “doğru sağa yatık olduğundan eğimi negatiftir” cevabını vermişlerdir.

Çokgenlerin sayısı ile çevre uzunluğu arasındaki ilişkinin grafik halinde gösterilmesinden sonra öğrenciler, üçgen, dörtgen ve beşgenden hangisine ait doğrunun eğiminin daha büyük olduğunu tartışmışlardır. Melike ve Oğuz, doğruların x eksenine yaptıkları açıdan yola çıkarak karar vermişlerdir. Buna göre beşgene ait doğrunun x eksenine yaptığı açı daha büyük olduğundan, eğiminin daha küçük olması gerektiğini söylemişlerdir. Devam ettirerek genişletmişler ve üçgene ait doğrunun x eksenine yaptığı açı daha küçük olduğundan da eğiminin daha büyük olması gerektiğini belirtmişlerdir. Bunun bir kural olup olmadığı sorulduğunda ise “açısı büyük olanın eğimi küçük olur.” şeklinde ifade etmişlerdir. Önceden edindikleri bu bilginin etkisiyle, bu soruda da yanlış bir genellemeye ulaşmışlardır.

4.2.3.2. Modifiye Edilmiş Fikir ya da Stratejiler

Öğrenciler, bazı genellemelerinin sonucunda daha önceden edindikleri önsel fikirlerini, karşılaşılan problem durumuna uyarlayarak düzenlemektedirler. Böylece, önsel fikirlerini modifiye etmiş olurlar.

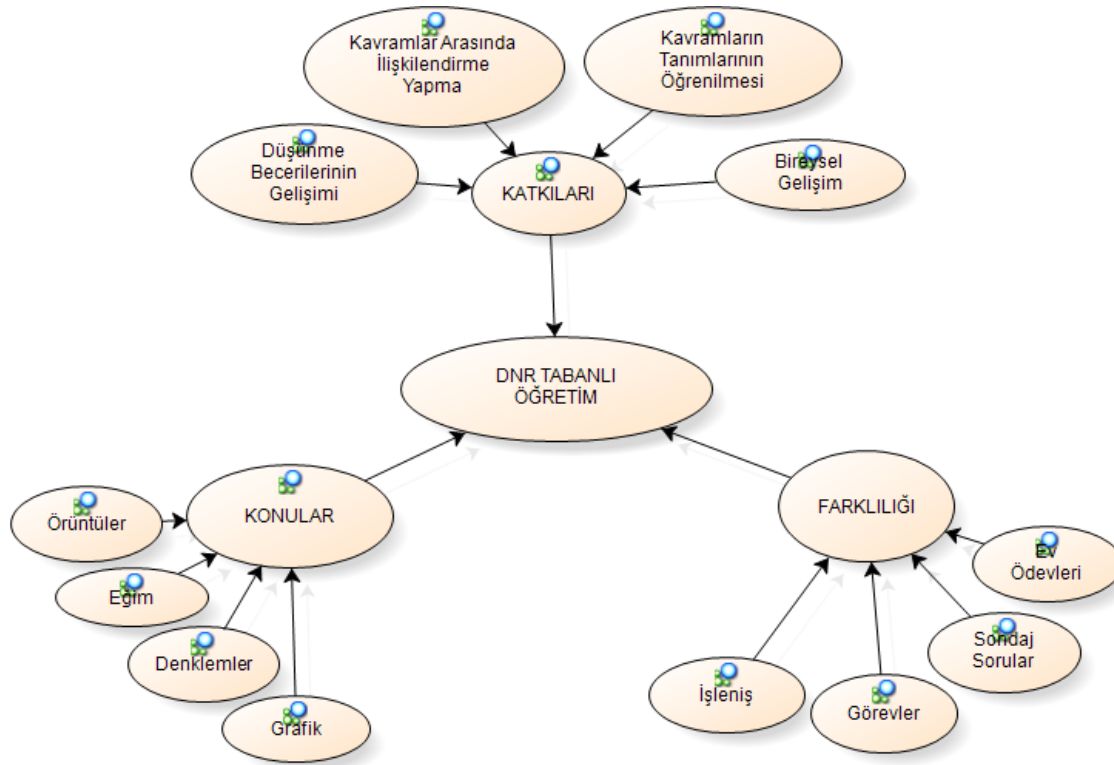
Oğuz’un, tanjant 30 ya da tanjant 60 değerinin eğimi verdiği önsel bilgisiyle sorulan soruya cevap verdiğinden az önce bahsedilmişti. Tartışmanın geri kalan kısmında, eğimin çeşitli yorumlarından bahsedilmiş ve açıklamalar yapılmıştır. Analitik geometri boyutunda ele alındığında tahtaya bir doğru çizilmiş ve doğrunun eğiminin neresi olduğu sorulmuştur. Öğrenciler eğimi, bilgilerini kullanarak “karşı bölü komşu” olarak ifade etmişlerdir. Bunun üzerine doğrunun, x eksenine yaptığı açı işaret edilerek “karşı bölü komşu” bilgisinin bu açı ile ilişkilendirilerek düşünceleri istenmiş ve sonunda açının tanjant değerinin, doğrunun eğimini verdiği bilgisine ulaşmışlardır. Dolayısıyla önsel fikirlerinin etkisiyle ifade ettikleri eğim bilgisini düzenleyerek yeni bilgilerini oluşturmuşlardır.

Yukarıda bahsedildiği gibi bazı öğrenciler, doğru sağa yatık olduğunda eğiminin negatif olduğunu belirtmişlerdir. Bunun üzerine eğimin, değişimlerin oranı olduğundan yola çıkarak değişimin pozitif yönde mi negatif yönde mi olduğunun incelenmesi istenmiştir. Öğrenciler, doğrunun x ve y eksenini üzerindeki hareketinin pozitif yönlü olduğunu ifade etmişlerdir. Dolayısıyla değişimin de pozitif yönlü olmasından dolayı doğru sağa yatıksa eğiminin pozitif olacağını belirtmişlerdir. Böylece, önsel fikirlerinin etkisiyle yanlış cevaplarını düzenleyerek doğrunun eğiminin pozitif olduğunu belirtmişlerdir.

Çokgenlerin sayısı ile çevre uzunluğu arasındaki ilişkinin grafik halinde gösterilmesi sorusunda öğrenciler, önsel fikirlerin etkisiyle “x eksenine yaptığı açı büyük olanın eğimi küçük olur.” bilgisiyle ilişkilendirerek beşgene ait doğrunun yaptığı açı büyük olduğundan eğiminin küçük olacağını belirtmişlerdir. Eğimin “y eksenindeki değişimin x eksenindeki değişime oranı” olması bilgisinden yola çıkarak üç şeklin çevre uzunlukları ele alınmıştır. Böylece paydalar sabit alındığından, payı daha çok olan beşgenin eğiminin de daha çok olduğu bilgisine ulaşılmıştır. Bunun durumu Elif “...hepsinde bölü 3’ler aynı oluyor. O zaman y’si daha çok olanın eğimi daha fazladır...” şeklinde genellemiştir. Böylece ‘yaptığı açı büyükse, eğimi küçük olur’ bilgisi modifiye edilmiştir.

4.3. DNR Tabanlı Öğretime İlişkin Öğrenci Görüşleri

Uygulanan öğretim deneyi hakkında öğrencilerin görüşleri, her günün sonunda öğrencilerin yazdığı öğrenci günlüklerinden ve öğretim deneyi tamamlanıldıktan sonra her öğrenci ile yapılan yarı-yapılandırılmış görüşmelerden elde edilmiştir. Öğrencilerin görüşleri incelendiğinde, DNR tabanlı öğretime ilişkin görüşler “konular”, “farklılığı”, “katkıları” temaları altında toplanmaktadır. Her tema da kategorilerden ve kodlardan oluşmaktadır. Aşağıda verilen modelde tema ve kategorilere yer verilmiş olup, modelin anlaşılacak derecede karışık olmaması için ilgili temanın incelendiği bölümlerde kategorilere ve kodlara da ayrıntılı olarak yer verilecektir.

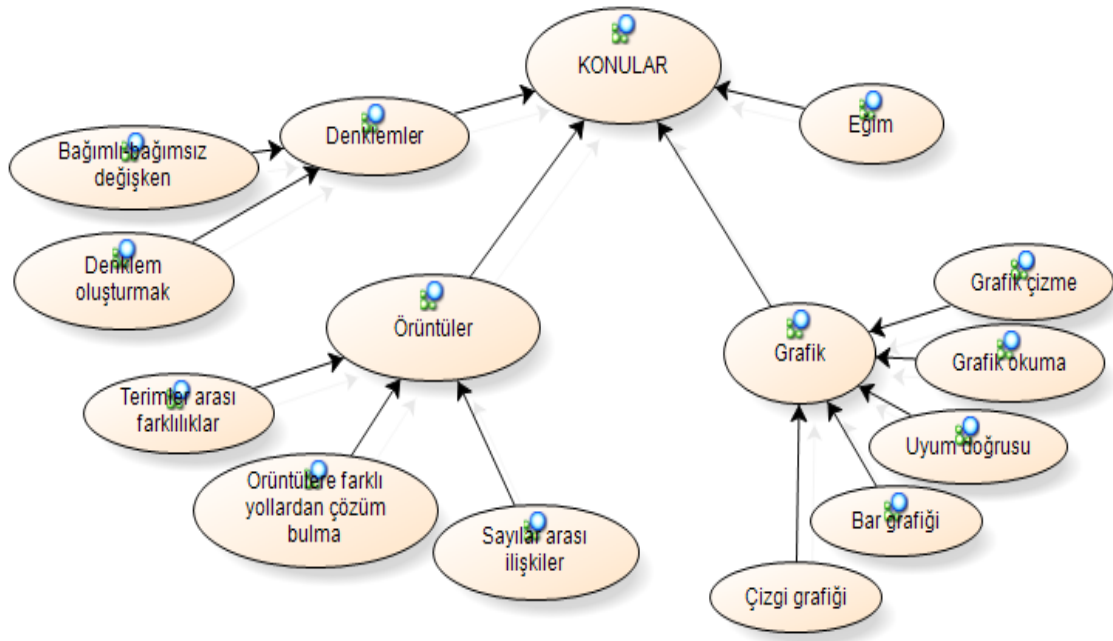


Şekil 35. DNR tabanlı öğretim hakkında öğrenci görüşleri

Modelde görüldüğü gibi “konular” teması örüntüler, eğim, denklemler, grafik kategorilerinden; “farklılığı” teması görevler, işleniş, sondaj sorular, ev ödevleri kategorilerinden; “katkıları” teması ise düşünme becerilerinin gelişimi, kavramlar arasında ilişkilendirme yapma, kavramların tanımlarının öğrenilmesi ve bireysel gelişim kategorilerinden oluşmaktadır. Her bir tema, öğrencilerin ifadeleri ile desteklenerek sunulmuştur.

4.3.1. “Konular” Temasına İlişkin Öğrenci Görüşleri

Öğrencilerin uygulanan öğretim deneyi sayesinde öğrendiği ya da önceden eksik öğrenip uygulama sayesinde daha iyi anladığı konular, “Konular” teması altında incelenmiştir. Öğrencilerin ifadelerine göre konular teması altında incelenen kategoriler modelde görülmektedir.



Şekil 36. DNR tabanlı öğretim sürecinde öğrencilerin daha iyi öğrendikleri konular

Modelde görüldüğü gibi öğrenciler uygulanan öğretim deneyi sayesinde örüntüler kategorisinde incelenen terimler arası farklılıklar, örüntülere farklı yollardan çözüm yolu bulma, sayılar arasında ilişkiler konularını; grafik kategorisinde yer alan grafik çizme, grafik okuma konularını; denklemler kategorisinde bağımlı-bağımsız değişken, denklem oluşturma konularını ve eğim konularını daha iyi anladıklarını ifade etmişlerdir. Ayrıca öğrenciler daha önceden bilmedikleri bar grafiği ve çizgi grafiği gibi grafik çeşitleri ile uyum doğrusunu da öğrendiklerini belirtmişlerdir.

Oğuz: Daha önceden eğimle ilgili bu kadar tartışma yapmamıştık ya da bu kadar uzun düşünmemiştik. Bugün eğimin birim x’de meydana gelen değişim olduğunu öğrendim.

Koray: Grafik konusunu bu şekilde işlemek daha iyi öğrenmemi sağladı. Önceki bilgilerim ezbermiş. Ama şimdi eğimi, eksen kestiği noktayı bildiğim sürece her türlü grafiği çizerim.

Sezen: Derslerde kafam çok karışıyor. Çünkü mesela örüntü kuralını önceden öğretmenimizin öğrettiği gibi kuralla yapardık. Şimdi 6-7 tane çözüm yolu bulduk her örüntüye. Kafam karıştı.

Elif: Denklem kurma yöntemi çok ilgimi çekti çünkü bunu bilmiyordum. Denklem $y=mx$ ya da $y=mx+n$ olduğuna karar verip m ve n’yi yerine yazınca denklemi yazmış olmak hem çok ilginç hem çok kolay.

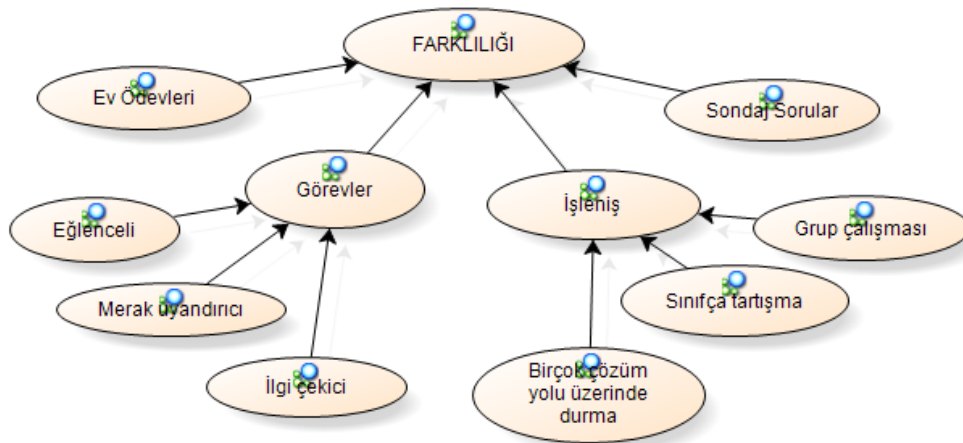
Melike: Mesela $y=3x+1$ denklemini düşünelim. Aslında bu da bir örüntüymüş, kuralı $3n+1$ olan bir örüntü. Doğrusunu da çizersek de başlangıç noktası 1, eğimi 3 olan doğru çizmiş oluyoruz. Yani örüntü aslında denkleymiş. Örüntü-denklemdir doğru hepsi aynı şeymiş. Önceden farklı sanıyordum.

Gül: Hızın formülünü unutsam bile soru çözebilirim. Şu saate kadar alınan yol şu kadarsa, 1 saniyede ne kadar yol alınmıştır sorusunun cevabı hız. O da zaten eğimle ilişkili. Eğim zaten y 'deki değişimin, x 'deki değişime oranıydı. Aynı şey yani ikisi de.

Bu çalışmanın amacı, öğrencilerin örüntü ve ilişkiler, değişimin analizi, denklemler konularında öğrencilerin düşünme ve anlama yollarını geliştirmek; sorulara farklı açılardan bakmalarını sağlamaktır. Uygulanan DNR tabanlı öğretim sayesinde daha iyi anladıklarını belirttikleri bu konuların aslında çalışmanın amacında belirlenen konular olması, uygulanan öğretim deneyinin bu konularda öğrencilerde en azından bir farkındalık oluşturduğu şeklinde yorumlanabilir.

4.3.2. “Farklılığı” Temasına İlişkin Öğrenci Görüşleri

Öğrencilerin uygulanan DNR tabanlı öğretimde okulda işledikleri matematik derslerine göre gözlemledikleri farklılıklar, bu tema altında incelenmiştir. “Farklılığı” teması altında incelenen kategoriler modelde görülmektedir.



Şekil 37. DNR tabanlı öğretimin okul derslerinden farklılıkları

Uygulanan öğretim deneyinde öğrencilerin okul derslerine göre farklı buldukları noktalar görevler, ev ödevleri, sondaj sorular ve işleniş kategorileri altında incelenmektedir. Buna göre öğrenciler en çok derslerin işlenişini farklı bulmuşlardır. Derslerin işleniş özetle şu

şekilde gerçekleştirilmiştir: Görevlerin bulunduğu renkli sayfaya bastırılmış çalışma kâğıtları üzerinde her öğrenci önce bireysel düşünmüş, daha sonra fikirleri ve çözüm yolları üzerinde grup arkadaşlarıyla tartışmışlar (bu sırada araştırmacı her grubu gezerek nasıl düşündüklerini anlamaya ve öğrencilerin düşüncelerini yönlendirmeye çalışmıştır), daha sonra bütün fikirler ve çözüm yolları üzerinde sınıfça tartışılmıştır. Öğrenciler, bu şekilde fikirlerini çekinmeden paylaştıkları, diğer fikirler üzerinde tartıştıkları ve kendi yanlışlarını görerek düzelttikleri bir ders ortamında daha iyi öğrendiklerini belirtmişlerdir. Ayrıca soruların farklı çözüm yollarının araştırılması ile '*düşünme yollarının*' (Koray'ın üçüncü günün sonunda günlüğüne yazdığı ifade) geliştiğini belirtmişlerdir.

Koray: Matematik dersini bu şekilde işlemek daha iyi anlamamı sağladı çünkü özgürce ne söyleyeceksek söylüyoruz. Yanlış olunca da neden yanlış olduğunu tartıştığımız için onu bir daha unutmuyoruz. Bu derslerde grupça tartışmak da hem çok eğlenceli oldu hem de anlaşılır oldu. Çünkü biz birbirimizi tamamlıyoruz.

Melike: Okulda bu konuların fazla üzerinde durmadık. Öğretmenimiz dersi anlattı, birkaç tane de soru çözdük. Buradaki gibi detaylı işlemedik. Bir de burada çözdüğümüz soruları hayatımda ilk defa görüyorum gibi hissediyorum. Çünkü çok ilginç sorular.

Bartu: Merak'ın Mars'a gitmesiyle ilgili soru çok ilgimi çekti. Önce videosunu izledik. Sonra o video üzerinden düşünüp soru hakkında yorum yapmak daha anlaşılır oldu. Bir de Merak'ın hızı çok ilgimi çekti, 1 saniyede 90 km yol alıyordu mesela. O ne hız, ne teknoloji.

Sezen: Okuldaki derslerden farkı daha çok mantığa dayalı, daha detaylı, farklı çözüm yolları üretme, sorulara farklı bakış açısı ile yaklaşıyoruz. Sorular okulda çözdüğümüz sorulardan daha farklı çünkü çok ilginç ve eğlendirici sorular. Sorular biraz zor olduğundan çözmek ve daha çok çözmek istiyorum. Bu derslerdeki tartışma ortamında herkesin fikirlerinin ele alınıp en doğru fikir üzerine düşünmek hem beni zorladı hem de daha çok anlamamı sağladı. Diğer arkadaşların neden, nasıl düşündüğünü bilmek farklı bakış açısı oluşturdu.

Gül: Daha çok düşünme ve düşündürme; bence bu dersi en iyi özetleyen şey bu.

Melike: Kâğıtların renkli olması çok hoşuma gitti. Bir de kameramızı çok seviyoruz, ona Rıfkı adını koyduk. En çok ondan ayrılacağıma üzülüyorum.

Elif: Bu konuları okulda zaten öğrenmiştik. Ama orada iyi anlamamıştım. Bu kadar detaylı incelemedik orada. Anlamadığım yerleri de çok soramıyorum. Bu derslerde kuralların

neden öyle olduğunu incelediğimiz için daha derin düşünüyoruz. İyi öğrendiğimi düşünüyorum. Grup çalışmaları çok şey kattı bana. Çünkü tartışarak ve düşündüklerimizi paylaşarak farklı çözüm yollarını düşündük. Birbirimizin eksikliklerini tamamladık. Derslerde grup arkadaşlarımla ve sonra sınıfta tartışarak yanlışlarımı düzeltiyorum. Yanlışlarımın üzerinde çok konuştuğumuz, yorum yaptığımız için de aklımda kalıyor, unutmuyorum.

Sezen: Grafiğin verilip de ona uygun problemin yazılması ve çözülmesi çok ilginç bir soruydu. Hep problemin verilip çözümün istenmesine alışık olduğumuzdan problem yazmak beni zorladı. Normal konularda işlememiştik onu. Ve bu çözdüğümüz biraz daha farklıydı ve bizim seviyemizin üstüydü.

Oğuz: Bu derslerdeki tartışma ortamında herkesin fikirlerinin ele alınıp en doğru fikir üzerine düşünmek hem beni zorladı hem de daha çok anlamamı sağladı. Diğer arkadaşların neden, nasıl düşündüğünü bilmek farklı bakış açısı oluşturdu.

Gül: ... bugün çok eğlenceliydi. Kameramıza Cabbar adını koyacaktık ama diğer grup bizden önce davranmış...

Öğrencilerin günlüklerindeki ifadelerden de anlaşılabileceği gibi diğer derslere göre farklı buldukları noktalardan biri de derslerde çalışılan görevlerdir. Öğrenciler, bu görevleri hem merak ettikleri için hem de ilgilerini çektiği için çözmek istemişlerdir. Ayrıca öğrenciler, görevleri eğlenceli buldukları için de çözmek istediklerini belirtmişlerdir. Harel (2008a) matematik öğretiminin eğlenceye ve sosyal aktivitelere dayalı olmaması gerektiğini belirtmiştir. Oysa öğrenciler, neredeyse her günün sonunda günlüklerine o gün ne kadar eğlendiklerini ya da ‘güldüklerini’ de değerlendirmişlerdir. Matematiksel tartışmaların ve akıl yürütmelerin yeterince yapıldığı bir ders ortamında, öğrencilerin sosyal olarak eğlenmeleri ve ‘gülmeleri’, öğrencilerin motivasyonlarını artırıcı bir unsur olarak görülmektedir.

Araştırmacının ders esnasında öğrencilerin düşüncelerini yönlendirmek için sorduğu sorular da öğrencilerin farklı bulduğu bir diğer noktadır. Bu sorular, öğrencilerin farklı çözüm yolları üzerinde düşünmelerini sağlamak için, ne düşündüklerini kendilerinin de fark edip bunları ifade edebilmeleri için ve onların nasıl düşündükleri hakkında derinlemesine bilgi sahibi olmak için sorulmuş sorulardır.

Bartu: ... açıkçası sizin soruları çözerken sorduğunuz sorular çok ikilemde bırakıyordu beni. Bildiklerimi de unutuyordum...

Gül: söylediğimiz her şeyden sonra neden diye soruyorsunuz ya artık bizde de alışkanlık oldu. Biri bir şey söyleyince alakasız da olsa ‘neden’ diye soruyoruz.

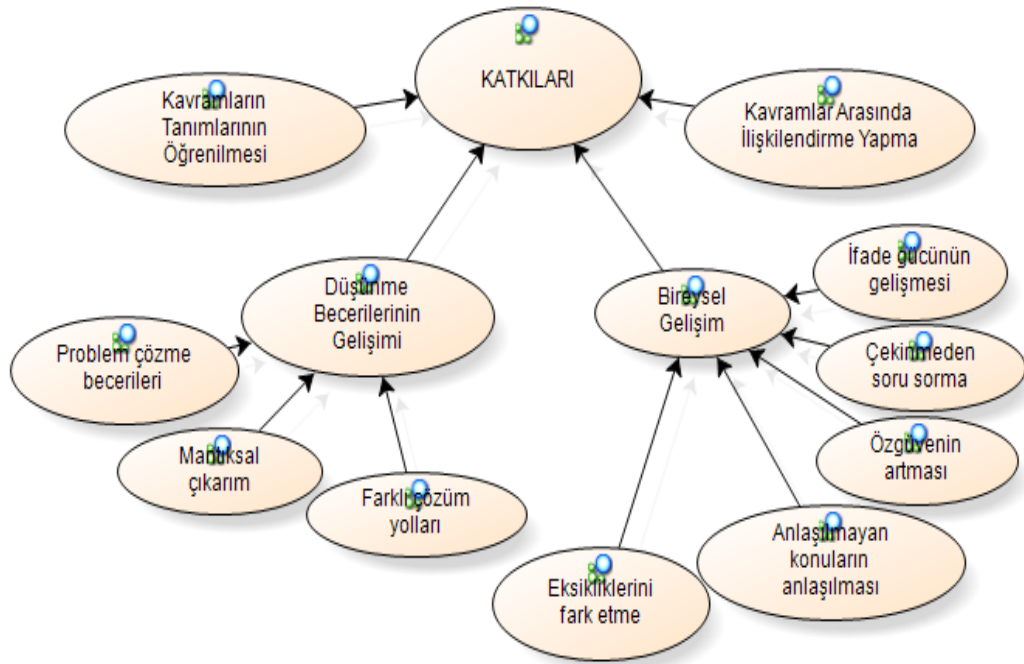
Ali: Verilen ödevlerde kuralları uygulamak yerine neden ve nasıl olduğunu araştırıyorum ve pekiştiriyorum. Yani yeni şeyler öğreniyorum.

Elif: Verilen ödevler farklı soruları çözmemi ve pekiştirmemi sağlıyor. Böylece diğer derslere hazırlıklı oluyorum. Evde de çalışıyorum ve düşünmeye devam ediyorum böylelikle.

Öğrencilerin uygulanan öğretim deneyinde farklı buldukları bir diğer nokta da verilen ev ödevleridir. Öğrenciler, okul derslerinde de ödev almaya alıştırlar. Ancak bu uygulama sürecinde verilen ödevler, o gün öğrenilen konunun tekrar edilmesinden çok, öğrencilerin muhakeme etmesini sağlayan ve farklı çözüm yolları üzerinde düşünmelerini sağlayan ödevlerdir. Öğrenciler de verilen ev ödevleri sayesinde problemin nedenlerini ve nasıllarını araştırarak yeni şeyler öğrenmeye devam ettiklerini belirtmişlerdir.

4.3.3. “Katkıları” Temasına İlişkin Öğrenci Görüşleri

Öğrencilerin uygulanan DNR tabanlı öğretimin kendilerine kattığını düşündükleri kodlar “katkıları” teması altında incelenmiştir. Elde edilen verilere göre “katkıları” teması altında incelenen kategoriler modelde görülmektedir.



Şekil 38. Öğrenci Gözünden DNR tabanlı öğretimin kendilerine katkıları

Öğrencilerin ifadelerine göre uygulanan öğretim deneyinin kendilerine katkıları kavramlar arasında ilişkilendirme yapma, kavramların tanımlarının öğrenilmesi, düşünme becerilerinin gelişimi ve bireysel gelişim kategorilerinde incelenmektedir. Derslerde farklı çözüm yolları üzerinde durulduğundan ve konular birbirleriyle ilişkili olarak analiz edildiğinden, öğrenciler kavramların tanımlarını öğrenerek kavramlar arasında ilişkilendirme yapabildiklerini şu ifadelerle belirtmişlerdir;

Koray: Bu derslerde en iyi öğrendiğim şey ilişkileri fark etmek ve ifade etmek oldu. Çünkü benim mantık oranım kitap okumadığım için az. Bu yüzden kavramam uzun sürüyor. Ama her gün hikâye okumaya başladım. Bu dersler sayesinde matematiği daha çok sevdim çünkü konular aslında birbiriyle çok ilgiliymiş. Öğrendikçe de daha çok ilgimi çekiyor.

Ali: Farklı çözüm yolları ve ilişkiler bulmak çok ilgimi çekiyor. Mesela dikdörtgenin çevresi ile eğim arasında bir ilişkinin olduğunu daha önceden hiç düşünmemiştim. Önceden açık aralık, kapalı aralık ne demek çok bilmezdim. Eğer o nokta denklemi sağlamıyorsa açık aralığa alıyormuşuz. Kuralların neden ve nasıl olduğunu anlamak hoşuma gidiyor.

Sezen: Çözdüğümüz sorular birbiriyle ilgili olduğundan ve bir önceki derste yaptığımız soru bir sonraki derste yaptığımız soruyla aynı gibi. Örüntü kuralı bulmayla başladık. Denklem yazma ile bitirdik. Ama hep birbirinin devamı gibiydi sanki. Zaten denklem yazmak örüntü kuralı bulmayla aynı şeymiş. Bunu fark etmek çok ilginçti.

Elif: Sağa 'yatık', sola 'yatık'ın anlamını bile bilmiyordum. Bilmesem de olurmuş zaten. Çünkü artık sağa yatıkken neden pozitif olduğunu biliyorum.

Ezgi: Bu dersler sayesinde matematiğin çok zengin ilişkilerden oluştuğunu öğrendim. Mesela x 'in hem kendi içinde, hem y ile hem de y 'nin kendi içinde ilişkisi çok ilginç geldi bana. Bir de hızı koordinat düzleminde göstermek çok ilginç geldi. Çünkü ben sadece tek bir şey koordinat düzleminde gösterilir sanıyordum. Ama hız gibi şeyler de gösteriliyormuş.

Ezgi: Problemlere tek yönden bakarken şimdi çözümle ilgili başka noktalar da düşünüyorum. Buna o kadar alıştım ki diğer derslerde de farklı açılardan bakmaya çalışıyorum sorulara.

Oğuz: Sayılar arasındaki farklı farklı ilişkiler çok ilgimi çekti. Daha önce hiç böyle düşünmemiştim. Yeni teknikler öğreniyorum her problem çözmede.

Sezen: Okulda hocamızın dediklerinin çoğunu anlıyorum ama bazılarını da anlamıyorum. Biraz daha detaya girilse iyi olur.

Öğrencilerin ifadelerinden de anlaşılabileceği gibi konuların birbiri ile ilişkisini fark etmek, kuralların neden öyle olduğunu araştırmak ve öğrenmek öğrencilerin heyecan verici bulduğu eylemlerdir. Matematikteki zengin ilişkilerin farkına varmaları, herhangi bir cebirsel ifadeyi denkleme, grafikte ya da tabloyla göstermenin aynı şey olduğunu fark etmeleri kavramsal öğrenmenin gerçekleşmesi için bir gösterge niteliğinde olabilir. Öğrenciler, öğretim deneyinde alıştıkları farklı çözüm yolları üzerinde düşünmeyi, diğer derslerde de uyguladıklarını söylemişlerdir. Bu söylemlerinden yola çıkılarak, öğrencilerin alternatif çözüm yolları üzerinde düşünmeyi zihinsel bir alışkanlık haline getirdikleri söylenebilir. Ayrıca problem çözme becerilerinin geliştiğini, farklı çözüm yolları üzerinde düşünebildikleri ve çeşitli mantıksal çıkarımlar yapabildiklerini de ifade etmişlerdir.

Bartu: TIMMS soruları çözmek bana ilginç geldi. Sonuçta başka ülkelerden insanlarla aynı soruları çözebildik. Demek ki onlar da bunları öğreniyormuş.

Sezen: Matematikteki asıl sorunun sorulara tek bir cevap ile açıklamaya çalışmakmış.

Gül: Soruları hemen çözmek istiyorum çünkü yeni bir şey düşünmek ve söylemek istiyorum. Arkadaşlarımı geçmek için de hemen yapmak istiyorum. Hele diğer gruptaki arkadaşlardan önce söyleyince çok mutlu oluyorum.

Gül: Bu dersler sayesinde yeni şeylere kapalı olduğumu fark ettim. Yani matematik anlamında. Daha farklı çözüm yolları düşünmek, sorulara daha farklı bakmak gerekir. Aslında hayattaki her şey için geçerli bu. Hayat dediğimiz şey de bir matematik problemi değil mi zaten☺ ha bir de şu var, görünenle gerçek her zaman aynı olmayabilir. Mesela bugünkü grafik sorusunda sadece tablodan yorum yapsaydık, yanlış cevap bulacaktık. Ama daha derin düşününce, eğitim değiştiği için bir saniyeden sonra farklı yorumlamak gerekti.

Melike: Sorulara farklı çözüm yolları bulabilmem, kendime güvenimin gelmesini sağladı. Herkes fikrini çekinmeden söylediği için ben de söyleyebildim.

Oğuz: Matematikteki en büyük eksikimin ön yargı olduğunu fark ettim. Daha önceden bu soruları görsem, çözemem diye başlamazdım bile. Şimdi çözemesem de akıl yürütürüm en azından.

Öğrencilerin ifadelerine göre onların farklı çözüm yolları üzerinde düşünebilmeleri, kendilerine güvenlerinin gelmesini sağladığı şeklinde yorumlanabilir. Ayrıca uluslararası alanda yapılan bir sınavın sorularını çözebilmek de onların kendilerini yeterli hissetmelerini sağlamıştır. Öğrencilere göre bu çalışmanın onlara bir diğer katkısı da kendileriyle ilgili eksikliklerinin ve yeteneklerinin farkına varmalarıdır. Bu anlamda “fark ettim” ifadesi, hem matematiksel ilişkileri

fark etmeleri olarak hem de kendileri ile ilgili durumları fark etmeleri olarak değerlendirildiğinde, bu çalışmanın önemli bulgularından biridir.

Öğretim deneyinin son gününde öğrencilerden uygulanan öğretim deneyi hakkında bir metafor yazmaları ve sebebini ifade etmeleri istenmiştir. Öğrencilerin metaforları ve sebepleri şu şekildedir;

Oğuz: İşlediğimiz dersler su dokuya benziyor. Çünkü bir sorunun içinden başka bir soru çıkıyor.

Koray: İşlediğimiz dersler kitaba benziyor. Çünkü işledikçe bizi içine çekiyor, içeriğe daha fazla giriyoruz.

Bartu: İşlediğimiz dersler beyin fırtınasına benziyor. Çünkü beyin fırtınası yapıyoruz.

Ali: İşlediğimiz matematik dersleri top oynamaya benziyor. Çünkü oynadıkça oynayışım geliyor.

Sezen: İşlediğimiz matematik dersler zekâ küpüne benziyor. Çünkü başlarda zorlanırsın ama sonra alışırsın.

Gül: İşlediğimiz dersler tangrama benziyor. Çünkü çözdükçe çözesin geliyor.

Melike: İşlediğimiz dersler balık tutmaya benziyor. Çünkü ilk başlarda balık tutamazsın. Denersin ama olmaz. Sonra taktikleri öğrenince balık tutmak daha kolay olur.

Ezgi: İşlediğimiz matematik dersleri toplama işlemine benziyor. Çünkü hepsini birbirinin üzerine ekleyerek yapıyoruz.

Elif: İşlediğimiz dersler bir örüntüye benziyor. Çünkü hepsi birbiriyle bağıntılı, ilişkili şeyler ve üstüne ekleyerek gidiyoruz.

Öğrencilerin DNR tabanlı öğretim hakkında yazdıkları metaforlar ve sebepleri incelendiğinde, bu metaforların yukarıda belirlenen temalar ve kategorilerin küçük bir özeti niteliğinde olduğu fark edilebilir. Zira öğrencilerin yaptıkları benzetmelerden yola çıkarak öğretim deneyinin “birbiri üzerine eklenen ve ilişkili konulardan oluşan, beyin fırtınasının yapılarak farklı çözüm yolları üzerinde durulan, çözülen soruların neden öyle olduğunun anlaşılması için öğrencinin sürekli kendine soru sormasını gerektiren ve fark edilen ilişkilerin heyecanı ile sürekli soru çözmenin ve öğrenmenin istenildiği” bir uygulama olarak değerlendirilebilir.



BÖLÜM 5

SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, sekizinci sınıf öğrencilerinin genelleme süreçlerine ilişkin düşünme ve anlama yolları belirlenmiştir. Bu amaçla, uygulanan kavramsal ve işlemsel cebir testlerinden en yüksek puanları alan 9 öğrenci seçilmiş ve 1 hafta ön uygulama, 6 hafta asıl uygulama olmak üzere öğretim deneyi uygulanmıştır. Öğretim deneyi örüntüler ve ilişkiler, değişimin analizi ve denklemler konularından oluşmaktadır.

Öğretim deneyi süreci, bütünsel bir bakış açısıyla değerlendirilecek olursa, şu sonuçlarla karşılaşılabılır: Öğretim deneyinin ilk beş görevi, örüntülerin kuralını bulmayla ilgilidir. Öğrenciler ilk günlerde, verilen şekil örüntülerini sayı örüntülerine dönüştürmüşler ve sonrasında öğretmenlerinin öğrettiği kuralla ilişkilendirerek örüntünün kuralını bulmuşlardır. Bu düşünme sonuç odaklı genelleme (*result pattern generalisation*) (Harel, 2008a) düşünme yolu olarak değerlendirilebilir. Çünkü öğrencilerin odağı, yaptıkları eylemlerin sonucu üzerindedir. Ancak örüntü ve ilişkilere ait konuların sonlarına doğru öğrenciler görevlerdeki örüntülere ait kuralları farklı yollardan düşünerek bulmuşlar ve terimler arasındaki ilişkileri yorumlamada başarılı olmuşlardır. Terimler arasındaki ilişkilerden yola çıkarak örüntü kuralı bulma ise süreç odaklı genelleme (*process pattern generalisation*) (Harel, 2008a) düşünme yolu olarak değerlendirilebilir. Çünkü öğrencilerin odağı, kuralı formüle göre bulmaktan ilişkileri yorumlayarak kuralı bulmaya kaymıştır. Örüntüler ve ilişkiler konusu, yaklaşık 2 hafta sürmüştür ve 2 hafta sonunda öğrenciler hem farklı yollardan düşünmeye başlayarak ilişkileri görmeye hem de yaptıkları işten keyif almaya başlamışlardır.

İlişkilerin yorumlanması ile değişimin analiz edildiği görevler, genelleme sürecinde oldukça önemlidir (Booker, 2009). Öğretim deneyinin altıncı gününde, değişimin analiziyle ilgili görevlere bazı doğruların eğimleri hakkında çalışarak başlanmıştır. Öğretim deneyi sürecinde, öğrencilerin oluşturdukları en önemli bilgilerden birinin,

eğimin, değişimlerin analizi boyutunda değerlendirilmesi olduğu düşünülmektedir. Bu konuya ait ilk görevlerde öğrencilerin, verilen sayı tablolarında sadece x ve y sütunları arasında bir ilişki olduğunu düşündükleri görülmektedir. Ancak birkaç görev sonunda öğrenciler, tablolardaki x sütununu kendi içinde, y sütununu kendi içinde ve x ile y sütununun birbirleri arasındaki ilişkilerinin farkına varmışlar ve bu ilişkilerden yola çıkarak yorumlarda bulunmuşlardır. Bu gelişim, sonuç odaklı düşünme yolundan süreç odaklı düşünme yoluna doğru bir gelişim olarak değerlendirilebilir. Ayrıca değişimin analizi konusunda, öğrencilerin fark ettikleri ve ilginç buldukları bir diğer ilişki ise hız ile eğimin ilişkilendirilmesidir. Bu ilişkilendirme sonucunda hızın, değişimlerin analizi boyutunda yorumlanarak, hızın tanımına ve formülüne ulaşılması ise ilgi çekici buldukları bir diğer noktadır. Öğretim deneyinin on birinci gününe gelindiğinde değişimin analizi ile ilgili görevler tamamlanmıştır. Öğrencilerin ilişkileri fark ederek değişimlerin sabit kalıp kalmamasını yorumlamada, büyük oranda başarı gösterdikleri görülmüştür.

Denklemlerle ilgili görevlerde, öğrencilerin analiz ettikleri değişimleri cebirsel, tablo, grafik gibi çoklu temsillerle göstermeleri amaçlanmaktadır. Öğrenciler, önceki görevlerden bu ilişkileri sözel olarak ve tablo halinde ifade etmeye alışmışlardır. Bu çalışmanın önemli olduğu düşünülen sonuçlarından biri de öğrencilerin, herhangi bir örüntüde buldukları kuralın (örneğin $3n+1$), aslında iki değişken arasındaki ilişkiyi gösterdiğini fark etmeleri ve dolayısıyla bu değişkenler arasındaki ilişkiyi denklem olarak yazabilmeleridir. Uygulanan öğretim deneyinin sonlarına doğru, en baştan beri buldukları örüntü kuralının aslında değişkenlerin birbirine göre değişimlerinin analizi olduğunu, gördükleri herhangi bir denklemin ise en başta buldukları kuraldan farklı olmadığını fark etmişlerdir. Bu da öğrencilerin ilgi çekici buldukları ve “*matematiğin güzelliği*” olarak ifade ettikleri bir başka noktadır. Ancak bu ilişkileri, grafik olarak göstermekte çeşitli zorluklar yaşamışlardır. Uygulanan öğretim deneyinin sonlarına doğru, öğrencilerin, ilişkileri grafikte göstermekte yaşadıkları zorlukları da önemli ölçüde giderdikleri görülmüştür. Benzer şekilde Elia ve Spyrou (2006) da çalışmalarında öğrencilerin, fonksiyonun cebirsel olarak ifade edilmesinde yüksek başarı gösterdiklerini; ancak bunu grafik olarak ifade etmekte zorlandıklarını ifade etmişlerdir.

5.1. Öğrencilerin Genelleme Süreçlerine İlişkin Yeni Bir Model

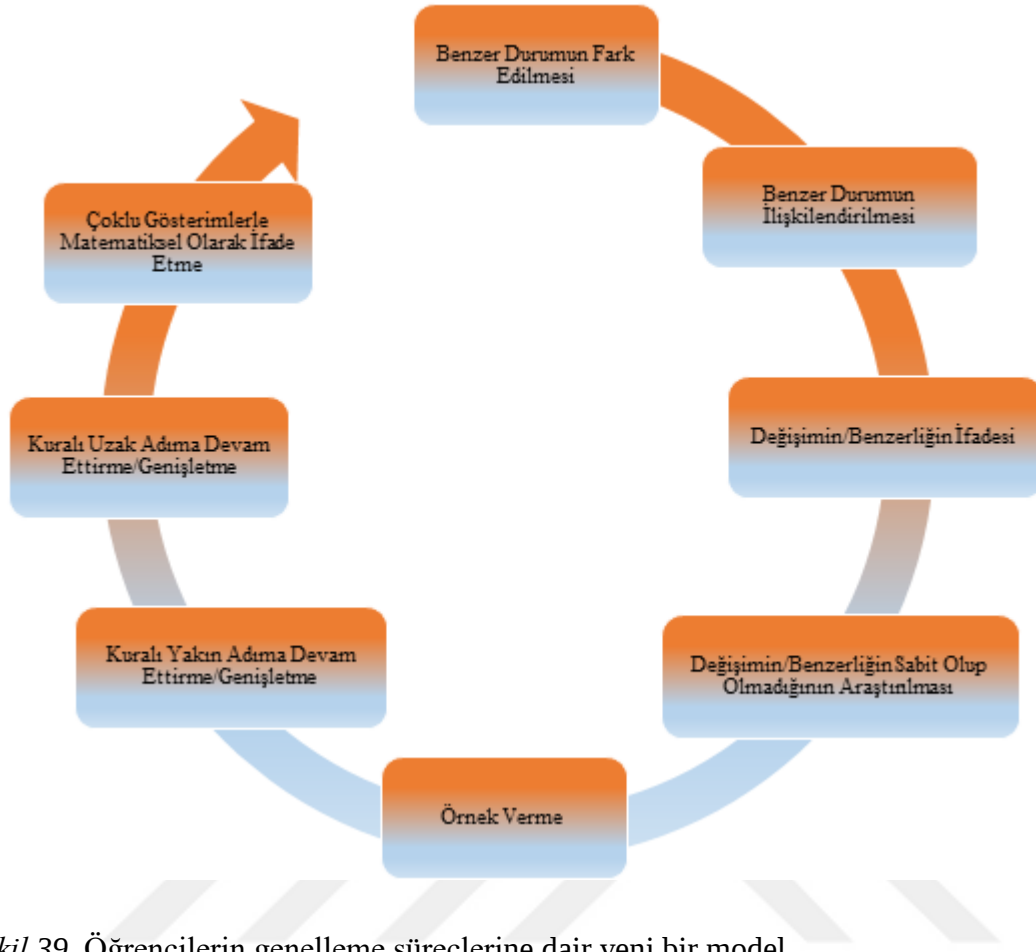
Uygulanan öğretim deneyi sürecinde öğrencilerin, verilen cebirsel problemleri genellemeleri dikkate alındığında, genelleme, “*benzer durumları ilişkilendirerek*

örüntünün/kuralın sabit olup olmadığının araştırılması ve kuralın devam ettirilmesi sonucu cebirsel bir ifadeye ulaşılması” şeklinde tanımlanabilir. Oluşturulan bu tanımda genelleme, süreç ve ürün boyutunda ele alınmıştır. Benzer durumların ilişkilendirilmesi, örüntünün sabit olup olmadığının araştırılması ve kuralın verilen durumun ötesine genişletilmesi, genelleme eyleminin düşünme yollarını oluşturmaktadır. Bu sürecin sonunda ulaşılan cebirsel ifadeler ise genelleme eylemine ait anlama yollarını oluşturmaktadır.

Alan yazında genelleme sürecinin açıklandığı çalışmalar bulunmaktadır (Garcia-Cruz & Martinón, 1998; Polya, 1957; Radford, 2003). Bu çalışmalarda genellemenin araştırmacı perspektifinden ele alındığı düşünülmektedir. Zira genelleme sürecinin aşamalandırıldığı bu çalışmalar, öğrencinin zihninde neler olup bittiği hakkında bilgi vermemektedir. Oysa araştırmacı ya da öğretmen olarak öğrencinin zihninde genelleme sürecinin nasıl gerçekleştiği hakkında bilgi sahibi olunursa, genelleme sürecinin gelişimi konusunda öğrenci daha iyi yönlendirilebilir. Çalışmanın başında da belirtildiği gibi öğrenenin zihninde olup bitenler, bu çalışmanın odağında bulunmaktadır. Dolayısıyla öğrencinin genelleme sürecine dair, öğrenen merkezli transfer yaklaşımı temele alınarak bir model önerilebilir.

Yine alan yazındaki çalışmalar incelendiğinde, genellemenin süreç ya da ürün olarak ele alındığı görülmektedir. Ancak genelleme yaparken öğrencinin zihninde gerçekleşenler (*süreç*) ve ortaya konan genelleme ifadesi (*ürün*), genelleme sürecinin tamamını oluşturmaktadır. Dolayısıyla süreç ve ürün boyutunun birlikte ele alınarak genellemenin incelendiği bir modele ihtiyaç duyulmaktadır. Bu yaklaşım, Harel’in da belirttiği gibi zihinsel eylemlerimizin düşünme ve anlama yollarından oluştuğu görüşüyle de paralellik göstermektedir.

Öğretim deneylerinde, öğrencilerin eylemlerinden ve işlemlerinden yola çıkılarak matematiksel bilgilerine dair bir model ortaya konabilir. Öğrencilerin matematiksel bilgileri hakkında fikir sahibi olmalarını sağlayacağından, bu modellerin öğretmen için yol gösterici olacağı düşünülmektedir (Cobb & Steffe, 1983). Uygulanan öğretim deneyinde öğrencilerin genelleme süreçleri analiz edilmiştir. Bu analizlerden yola çıkılarak öğrencilerin genelleme süreçlerine dair şu şekilde yeni bir model ortaya konulabilir;



Şekil 39. Öğrencilerin genelleme süreçlerine dair yeni bir model

Yukarıda verilen modelde de görülebileceği gibi öğrencilerin genelleme süreçleri şu şekilde özetlenebilir: Öğrenci öncelikle verilen durumu inceleyerek bir benzerlik fark eder. Bu, genelleme sürecinin ilk adımıdır. Daha sonra bu benzerliği, zihnindeki bir problem durumuyla, matematiksel objeyle ya da otoriteyle ilişkilendirir. Öğrencinin ilişkilendirilen bu benzerliği ifade etmesiyle, değişimin sabit olup olmadığının araştırılması süreci başlar. Verilen örüntünün terimleri arasında değişimin/benzerliğin sabit olup olmadığını araştırırken, öğrenci bazı durumlarda örnek vererek fikrini savunur. Daha sonra sabit olduğu belirlenen değişim/benzerlik, örüntünün yakın adımına ya da uzak adımına genişletilerek, verilen durumun ötesinde kuralın geçerli olduğu ifade edilir. Daha sonra bu kural cebirsel, grafik, tablo gibi gösterimlerle ifade edilir.

5.2. Öğrencilerin Düşünme Yollarına İlişkin Sonuçlar; Genelleme Taksonomisinin Otorite İle İlişkilendirme ve Aynı Parça Araştırma Kategorilerinin Eklenmesi İle Yeniden Düzenlenmesi

Uygulanan öğretim deneyi sonucunda öğrencilerin genelleme süreçlerine ilişkin belirlenen düşünme yolları; ilişkilendirme, araştırma, genişletme ve bu kategorilerde belirlenen düşünme yollarından oluşmaktadır.

Genelleme süreci verilen olay, durum, problem arasında bir benzerlik ilişkisinin fark edilmesi ile başlamaktadır. Fark edilen bu benzerliğin, ‘ne’ ile ‘ne’ arasında kurulduğu ilişkilendirme kategorisinde incelenmektedir. Bu benzerlik iki problem ya da durum arasında kurulursa, *durumları ilişkilendirme*; denklem, grafik, tablo gibi iki matematiksel obje arasında kurulursa, *nesneleri ilişkilendirme* kategorisinde incelenmektedir. Burada kurulan benzerlik, öğrenci perspektifinden bir benzerlik ilişkisidir. Merkezde öğrenci olduğundan onun odağında ne olduğu, önem kazanmaktadır. Öğretim deneyinin birinci gününde öğrenciler örüntü kuralı bulduklarında araştırmacı neden öyle yaptıklarını sorduğunda, öğretmenleri öyle öğrettiği için kuralı o şekilde bulduklarını ifade etmişlerdir. Burada öğrenciler iki problem durumunu ya da matematiksel objeyi ilişkilendirmekten çok, karşılaştıkları problem durumu ile bir otoritenin öğrettiği kural arasında ilişkilendirme yapmışlardır. Bir otoritenin fikirlerini esas alanlar, otoritenin açıklamalarına, deneyimlerine daha çok güvenmektedirler. Bu yolla edilmiş bilgiler nedeninin, nasılının sorgulanmadan doğru olarak kabul edildiği bilgilerdir (Gambrill, 1999). Burada otorite olarak görülen öğretmen, kitap gibi daha bilgili dışsal bir kaynaktır. Dolayısıyla ‘*otorite ile ilişkilendirme*’nin, ilişkilendirme kategorisine eklenmesi uygun görülmüştür.

Otoriteye dayandırılarak elde edilen bilgiler, öğretmen öyle olduğunu söylediği için sorgulanmadan doğru olarak kabul edilen bilgilerdir. Öğretim deneyinin ilk günlerinde öğrencilerin örüntü kuralı bulduklarında neden öyle yaptıkları sorulduğunda sadece ‘öğretmen öyle öğrettiği için’ cevabını verebilmişler, mantıklı açıklamasını yapamamışlardır. Dolayısıyla bu bilgiler işlemsel bilgi boyutunda değerlendirilebilir. Zira öğretmenlerinin öğrettiği şekilde örüntü kuralı bulan öğrencilerin, başka bir yoldan kuralı bulmayı denemeleri istendiğinde, ‘başka bir yoldan kural bulmanın’ ne demek olduğunu bile anlamlandıramamışlardır. Öğrencilerin bilgilerini otoriteye dayandırarak savunmaları, öğretim deneyinin ilk iki haftasında gözlemlenmiştir. Sonrasında ise bilgilerini sorgulayarak farklı yollardan düşünme alışkanlığı kazandıklarından, bilgilerinin işlemsel olmaktan kavramsal olmaya doğru değişim gösterdiği söylenebilir.

Benzer durumların ilişkilendirilip ifade edilmesiyle birlikte benzerliğin/değişimin sabit olup olmadığı araştırılmaktadır. Bu durum, genelleme sürecinde araştırma kategorisi olarak değerlendirilmektedir. Örneğin; öğretim deneyinde uygulanan tablodaki sayılar arasındaki ilişkinin araştırıldığı soruda, öğrencilerin bir kısmı adım sayısı ile terimi ilişkilendirerek tablodaki sayılarda *benzer ilişkinin varlığı araştırırken*, bazı öğrenciler ise sayılar arasındaki ilişkiyi fark etmeden *benzer prosedür araştırmışlardır*. Yine aynı soruda bazı öğrenciler, adım sayısı arttıkça terimlerin de arttığını ifade etmiş; ancak bunun ötesine geçemeyerek *benzer örüntü araştırmışlardır*. Bazı öğrencilerin odağı ise benzer sonucu tekrar tekrar elde etmek olduğundan yaptığı işlemlerde *benzer çözümünü/sonucu araştırmışlardır*. Uygulanan öğretim deneyinde tüm bu kategorilerin örneklerine rastlanmıştır.

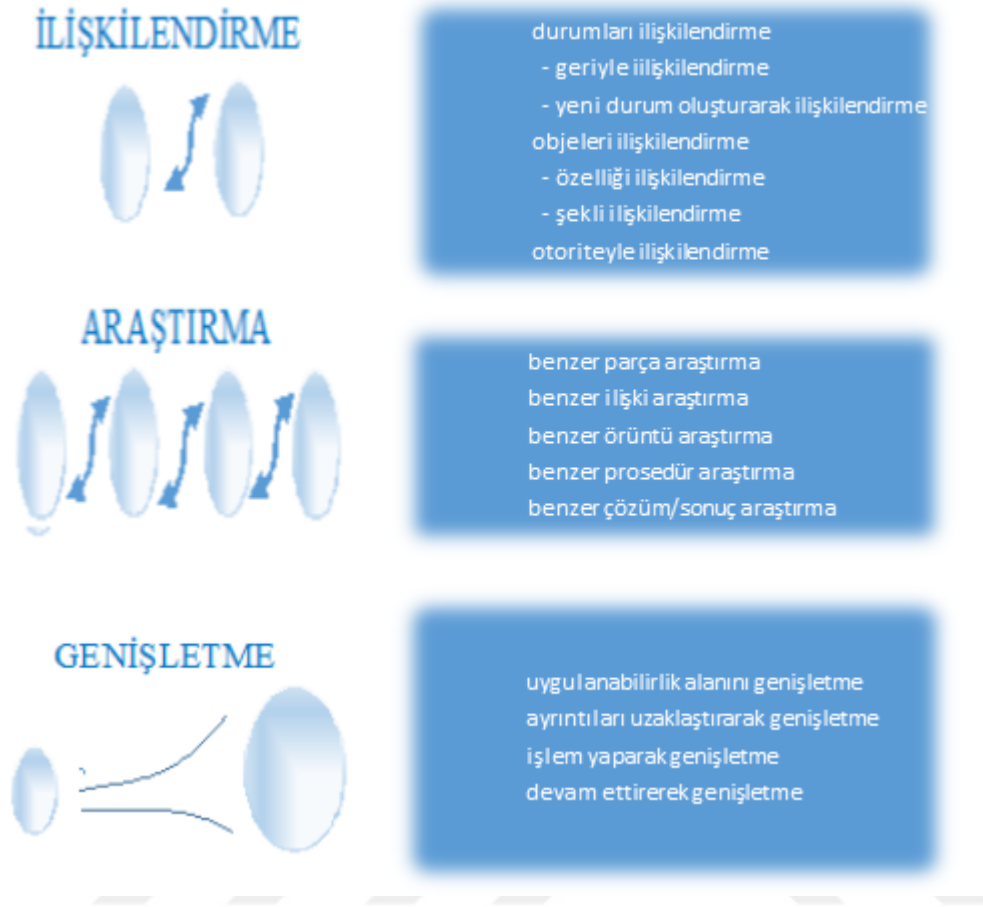
Matematiksel görselleştirme; kâğıt-kalem, teknoloji kullanarak ya da zihinsel olarak şekilleri oluşturma, bu şekilleri matematiksel keşif ve anlamları artırmak için kullanma sürecidir (Zimmermann & Cunningham, 1991, s. 3). Arcavi'ye göre (2003, s. 216) görselleştirme öğrencilerin soyut ilişkileri ve kavramları diyagramlar, modeller, grafikler şeklinde somut hale getirdikleri ve zihinsel olarak 'görünmeyi görme' yeteneklerini ifade etmektedir. Basit ve küçük yapıları, onlara ait örneklerini görerek bilebiliriz. Örneğin; daha önce gördüğümüz kelebekler sayesinde, kelebek şeklinin neye benzediği biliriz. Ama genellikle yapılar, görsel olarak bilinemeyecek kadar büyük ve karmaşıktır. Böyle durumlarda, yapılar hakkındaki bilgilerimizi teorik yollardan elde etmekteyiz (Giaquinto, 2007, s. 236).

Örüntü oluşturma, kişisel ve yapıcı bir eylem olduğundan öğrenciler, örüntünün bilinen ve bilinmeyen adımları hakkında çıkarımlarda bulunmak için kavrayışlarını ve sembolik bilgilerini iyi koordine etmelidirler (Rivera, 2010, s. 298). Öğretim deneyinin ikinci gününde basamak örüntüsüyle ilgili olarak Ali, terimleri parçalayarak bir kural elde etmeye çalışmıştır; "*Birinci adımda 1 satır, 1 sütun; ikinci adımda 2 satır ve 2 sütun. Her satır ve her sütunda 3 nokta olduğundan toplam 6 nokta eder. Adım sayısını 6 ile çarptım. Sonra bunu (satır ve sütunun kesişimindeki nokta) iki kez saydığım için çıkardım. İki kez saydığım noktaların kuralını da buldum. $2n-1$ yapıyor. $6n$ 'den $2n-1$ 'i çıkardım. $4n+1$ 'i buldum*" (şekil 12). Eğer Ali, adımlar arasındaki bir ilişkinin sabit olup olmadığı araştırsaydı (örneğin; birinci adıma 4 eklenmiş ve ikinci adım elde edilmiş, ikinci adıma da 4 eklenmiş ve üçüncü adım elde edilmiş gibi), o zaman bu eylem, benzer ilişki araştırma kategorisinde değerlendirilebilirdi. Ancak Ali, öncelikle birinci adımı oluşturan ve üst üste gelen

parçaları belirlemiş ve sonra ikinci, üçüncü adımın da bu parçalardan oluşup oluşmadığını incelemiştir. Dolayısıyla adımları parçalayıp bu parçaların diğer adımlar için de sabit olup olmadığı araştırıldığından, yani odak adımı oluşturan parçalar olduğundan, bu parçaların sabit olup olmaması diğer aşamada araştırıldığından, genelleme taksonomisine yeni bir kategori olarak eklenmesi gerekmektedir. Ali'nin örüntü kuralı bulurken kullandığı bu stratejiyi, Rivera (2010) “yapıyı çözücü genelleme” olarak adlandırmıştır. Bu çalışmada öğrencilerin genelleme süreçleri genelleme taksonomisi temel alınarak incelendiğinden, bu stratejiyi çalışmanın doğasına uygun hale getirmek gereği doğmaktadır. Dolayısıyla Ali'nin örneğinde olduğu ve diğer öğrencilerin de zaman zaman gerçekleştirdikleri bu eylemin, araştırma kategorisi altında “benzer parça araştırma” olarak eklenmesi uygun görülmektedir.

Araştırılan ilişkinin sabit olup olmadığının belirlenmesinden sonra, bu ilişkiyi matematiksel olarak uygun ve doğru bir şekilde genişletme süreci gelmektedir. Belirlenen ilişkinin verilen durumun ötesinde genel bir yapıda ifade edilmesi, genişletme kategorisi altında değerlendirilmiştir. Uygulanan öğretim deneyinde öğrencilerin bu ilişkiyi daha geniş durumlara uygulanır hale getirdiği *uygulanabilirlik alanını genişletme*, daha global bir durum oluşturmak için bağlamsal *ayrıntıları uzaklaştırarak genişletme*, bir ilişki üzerinde işlem yaparak ilişkiyi bir fenomenin yeni örneklerine uygulayarak *işlem ile genişletme*, bir örüntüyü tekrar tekrar uygulayarak *örüntüyü ya da fikri devam ettirerek genişletme* yapmış oldukları belirlenmiştir. Yapılan bu genişletmelerin tablo, grafik, cebirsel olarak ifade edildiği belirlenmiştir.

Uygulanan öğretim deneyinin sonucunda elde edilen verilerin analizi ile öğrencilerin genelleme süreçlerine ilişkin düşünme yolları, Ellis'in (2004) çalışmasından uyarlanarak ve bu çalışmanın sonucunda yeni kategorilerin eklenmesiyle şu şekilde düzenlenebilir;

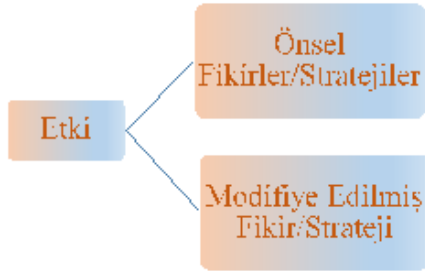
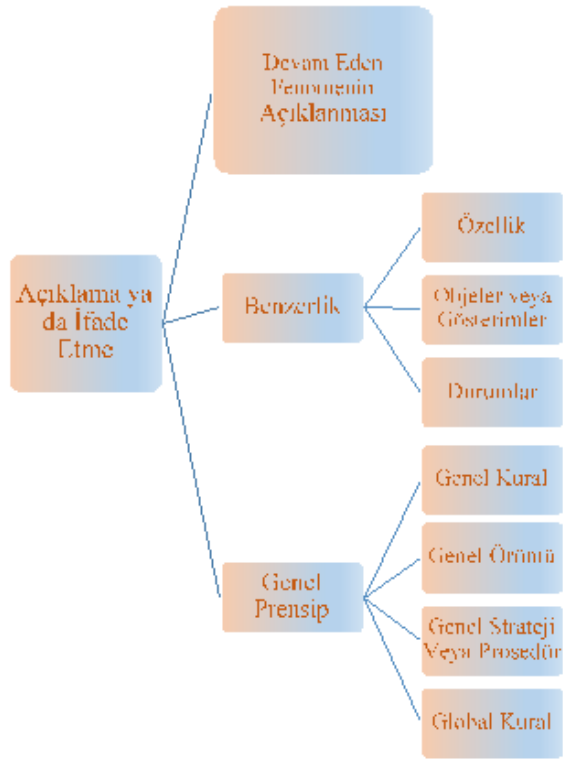


Şekil 40. Öğrencilerin genelleme süreçlerine ilişkin düşünme yolları (Ellis'den (2004) uyarlandı)

Şekilde de görüldüğü gibi genelleme sürecinde öğrencilerin düşünme yolları durumları, objeleri ilişkilendirme ve otoriteyle ilişkilendirme; benzer parça, ilişki, örüntü, prosedür, çözüm/ sonuç araştırma; uygulanabilirlik alanını genişletme, ayrıntıları uzaklaştırarak, işlem yaparak ve devam ettirerek genişletme kategorileriyle belirlenmektedir.

5.3. Öğrencilerin Anlama Yollarına İlişkin Sonuçlar

Öğrencilerin genelleme eylemleri sonucunda ortaya koydukları ürünler, yansıma genellemeleri olarak kategorize edilmiştir. Buna göre öğrenciler, oluşturdukları genellemelerini belirleme/açıklama, tanım olarak ifade etmekte ve bazı ifadelerini de önceden sahip oldukları deneyimlere göre belirlemektedirler. Aşağıdaki şekil Ellis'in (2004) çalışmasında belirlenen ve bu çalışmada da öğrencilerin genelleme süreci sonucunda ortaya koydukları anlama yollarını göstermektedir.



Şekil 41. Öğrencilerin genelleme süreci sonucunda ortaya koydukları anlama yolları

Öğrenciler, genelleme süreci sonunda devam eden bir fenomen açıklayabilirler, durumların benzerliklerini açıklayabilirler ya da genel bir prensip ortaya koyabilirler. İki ya da daha çok durum arasında benzer bir özellik ifade edebilirler, obje ya da gösterimlerin, durumların benzerliğini ifade edebilirler. Uygulanan öğretim deneyinde hemen hemen her görev genellenen ürünün sözel, cebirsel, tablo ya da grafikten en az birinin gösterimini içerdiğinden, bu durum benzer obje ya da gösterimin ifadesi olarak değerlendirilmiştir. Çünkü aynı durumun farklı yollarla temsili söz konusudur. Öğrenciler, genelleme ürünü

olarak ilişkiler arasında genel bir kural ifade edebilirler, ilişkiler arasındaki örüntüyü fark ederek genel örüntü ifadesi ortaya koyabilirler, çözüme dair genel strateji/prosedür ortaya koyabilirler. Genel prensip olarak matematiksel bir kural da belirleyebilir ve ifade edebilirler. Genelleme ürünü olarak öğrenciler, objeler sınıfı da tanımlayabilirler. Bunlar matematiksel olarak tam ve doğru global kurallar ya da tanımlar olmayabilirler. Tanımlanan, öğrencinin gözünden objeler sınıfıdır. Öğrenci, daha önceki deneyimlerinin etkisiyle bir genelleme ürünü de ortaya koymuş olabilir. Eğer bu yanı sıra, önsel fikirlerin etkisiyle ortaya konulan ürün değiştirilir ve düzeltilerek modifiye edilir. Bunun sonucunda elde edilen ürün modifiye edilmiş önsel fikirdir.

Grafikler, değişkenler arasındaki ilişkileri açıklamada yaygın olarak kullanılmaktadır. Soyut ve karmaşık bilgileri görselleştirerek daha basit bir şekilde sunduğu için cebirde, geometride, istatistik gibi alanlarda sıklıkla kullanılmaktadır. Grafiklerin etkin kullanımının öğrencilerin kavramsal öğrenmelerini artırdığı, uzamsal düşünebilme ve problem çözme yeteneklerinin gelişimine katkı sağladığı da bilinmektedir (Bayazıt, 2011). Hughes Hallett (1991) matematiksel kavramları öğretirken analitik, sayısal, görsel gösterimlerin birlikte kullanılması gerektiğini belirtmiş ve bunu “3 kuralı” olarak ifade etmiştir. Buna göre konular, birbiriyle ilişkili olarak grafiksel, numerik ve analitik olarak desteklenerek öğretilmelidir (Hughes Hallett’den aktaran Tall, 1997). Alan yazındaki birçok çalışma, kavramların öğretiminde çoklu temsillerin önemine ve birbirleriyle ilişkilendirilerek öğretiminin gerektiğine vurgu yapmaktadır (Akkoç, 2006; Akkoç & Tall, 2002; Gagatsis, Christou & Elia, 2004; Mousolides & Gagatsis, 2004; Tall, 1997; Yamada, 2000). Matematiksel kavramların içselleştirilip yorumlanmasında, kavramların farklı temsillerle gösterilmesi ve bu temsiller arasındaki ilişkinin anlaşılması oldukça önemli kazanmaktır (NCTM, 2000).

Öğrencilerin grafikler konusunda yaşadıkları zorluklar, grafik okuma ve yorumlama, grafik çizme, grafiklerle diğer gösterimler arasında ilişki kuramama ve geçişleri yapamama olarak kategorize edilebilir (Bayazıt, 2011; Knuth, 2000). Bu çalışmada öğrencilerin, grafikler ile diğer gösterimler arasında ilişki kuramadıkları ve özellikle grafiği verilen bir doğrunun cebirsel forma dönüştürülmesinde sorunlar yaşadıkları gözlemlenmiştir. Benzer şekilde alan yazında öğrencilerin, tablo ile verilen ya da cebirsel olarak verilen fonksiyon grafiklerini çizmede değil de grafiği verilen fonksiyonun cebirsel olarak elde etmede sıkıntı yaşadıkları belirlenmiştir (Even, 1998; Kieran, 1992; Markovits, Eylon & Bruckheimer, 1986; Miller, 2000). Matematiksel kavramların, ‘3 kuralına’ uygun şekilde

gösterimler arasında ilişkilendirmelerin yapılarak öğretilmesi, grafik çizme ve yorumlamada yaşanan öğrenci zorluklarını büyük oranda gidereceği düşünülmektedir.

Eğim konusunun öğretilmesi, cebir konuları içinde önemli konulardan biridir (Cheng, 2010). Çünkü iki değişkenin birbirlerine göre değişimi arasındaki ilişkinin incelenmesi, cebirsel düşünmenin gelişimi için önemli olmakla birlikte, fonksiyonel düşünmenin gelişimi için de temel oluşturmaktadır. Öğrencilerin eğimi anlamaları, lokal anlama ve global anlama olarak sınıflandırılmaktadır. Buna göre lokal seviyede eğim bilgisi, bir doğru üzerindeki herhangi bir parçanın eğimi üzerinde çalışmayı gerektirirken; global seviyede eğim bilgisi, iki değişken arasındaki değişimin oranını fonksiyonel bir ilişki olarak görmeyi gerektirmektedir (Walter & Gerson, 2007). Dolayısıyla lokal seviyede bir anlama, işlemsel bir anlamayı işaret ederken; global seviyede bir anlama ise kavramsal bir anlamayı işaret etmektedir.

Bu çalışmada öğrencilerin eğim konusundaki kavrayışları, eğimin cebirsel, geometrik, fiziksel, trigonometrik, oransal boyutları üzerinde yoğunlaşmaktadır. Benzer şekilde alan yazında da öğrencilerin eğim konusundaki kavrayışları, eğimin geometrik oran boyutu (doğru üzerinde (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktaları verildiğinde eğiminin $(y_2 - y_1) \div (x_2 - x_1)$ şeklinde gösterilmesi), cebirsel oran boyutu (örneğin $y=mx+n$ şeklindeki bir eşitliğindeki m parametresi), fiziksel özellik (örneğin kayak pistlerinin dikliği), fonksiyonel özellik (örneğin iki değişkenin birbirine göre değişimi), parametrik katsayı, trigonometrik kavram (örneğin bir doğrunun x eksenine yaptığı açının tanjantının eğimi vermesi), gerçek yaşam gösterimi (merdivenin eğimi gibi), eğimin düzlüğü boyutları hakkında olduğu rapor edilmektedir (Stanton & Moore-Russo, 2012; Stump, 1999, 2001).

Öğrencilerin, eğimin “dikey bölü yatay” olarak verilen tanımının $(y_2 - y_1) \div (x_2 - x_1)$ formülü ile gösterilmesine alışık olduklarından, orijinden geçmeyen herhangi bir doğrunun eğiminin, doğrunun üzerinde verilen bir $A(x, y)$ noktasının eğimine eşit olarak düşünüp eğimi $y \div x$ olarak ifade ettikleri görülmüştür. Buradaki iki zorluktan bahsedilebilir. İlki, öğrencilerin eğimi ‘dikey bölü yatay’ olarak kısıtlı bir anlama geliştirmeleridir. İkincisi ise eğimin kavramsal boyutunu bilmediklerinden ya da dikkate almadıklarından, bir noktanın da eğiminin olabileceğini kabul ederek $y \div x$ oranının, noktanın eğimine eşit olduğunu kabul etmeleridir. Oysa öğrencilerin, eğimin iki değişken arasındaki değişime yönelik kavramsal bir anlayış geliştirmeleri gerekmektedir. Böyle yapıldığı takdirde öğrenci, eğimin kavramsal boyutu hakkında muhakeme edilebilir ve birbirleriyle ilişkili olarak değişen iki değişken arasındaki ilişki üzerine bir anlayış geliştirebilir.

Matematik, kendine özgü kuralları olan bir dildir. Dolayısıyla bir dil gibi öğretilmesi gerekmektedir (Aiken, 1972). Hickerson (1959, s. 243-244) aritmetik ve dil arasındaki benzerliklerden yola çıkarak, matematik dilinin öğretilmesi için bazı aşamaların öğretilmesi gerektiğini önermiştir; i) problem durumunu çoklu algılama, ii) problem durumundaki nicel ilişkileri ifade etmek için sözel dilin kazanılması, iii) sözel olarak ifade edilenlerin aritmetik sembollerle ifade edilmesi, iv) yazılı ve sözel olarak yapılan ifadelerin anlamlandırılması, v) bunları öğrendikten sonra sayıların, sayı kombinasyonlarının, algoritmaların yazımı, vi) hatırlayarak kuralları uygulama yoluyla değil de işlemlerin çıkarımlarla yürütülmesi, vii) kuralların, özelliklerin, genellemelerin matematiksel akıl yürütme yollarıyla öğretilmesi, viii) gerçek yaşam uygulamaları, sözel ve yazılı olarak ifade edilen sembollerin ve aritmetiğin doğasına yönelik bilgilerin birbirleriyle ilişkilendirilmesi. Günlük konuşmalarımızda bile aynı sözcüğe farklı anlamlar yüklememiz, bizim konuşurken anlatmaya çalıştığımız ile karşı tarafın çıkardığı anlamın farklı olması, çok sık rastlanan bir durumdur. Hal böyleyken kendi kelime hazinesi, sembolleri, söz dizimi, kuralları olan matematiğin bir de soyut olan boyutunu düşündüğümüzde, bu dilin anlaşılmasında çeşitli iletişim sorunları olması kaçınılmazdır. Matematikte kullanılan en basit kavramlar ya da terimler bile öğrenciye yabancı olabilir, söylemek istediğimizle anlaşılan çok farklı olabilir. Öğrencinin karşılaştığı pek çok durum yeterince açık olmadığından öğrenciye ‘*uzaylı*’ gibi gelmektedir (Harel, 2007, s. 12). Burada bahsedilen; öğrencinin karşılaştığı problem durumu, sınıfta kullanılan dil, terimler, kavramlar olabilir. Öğretmen ve öğrenci arasında iletişim tam olarak gerçekleşemediğinden öğrenci, söyleneni anlamaz ve anlatılanı öğrenmeye istekli olmaz. Öğretmenler ve kitaplar tarafından kullanılan “doğru sağa yatıksa eğimi pozitifdir, sola yatıksa eğimi negatiftir” kuralında, matematiksel bile olmayan günlük kullanım diline ait ‘sağa yatık, sola yatık’ ifadelerinde, öğretmenin söylemek istediği ile Ezgi’nin anladığının farklı olduğu görülmüştür. Dolayısıyla öğretmenlerin matematiksel olan ve matematiksel olmayan sözcükleri doğru şekilde kullanmaları, matematiksel iletişim çatışmalarının önlenmesi açısından oldukça önemlidir.

5.4. Uygulanan DNR Tabanlı Öğretim Deneyine Dair Öğrenci Fikirleri

Uygulanan DNR tabanlı öğretim deneyi hakkında öğrencilerin fikirlerine dair modelin; çalışmada *ne* işlendiğine, bu konuların *nasıl* öğretilmek istendiğine ve sonunda öğrencide *hangi* becerilerin geliştirilmek istendiğine dair bir model olduğu fark edilebilir. Bu öğretim

deneyinde denklemler, grafik, eğim ve örüntüler konuları ele alınmıştır. Öğretim deneyleri öğrencilerin nasıl düşündüklerinin belirlendiği ve süreç boyunca oluşan değişimin gözlemlendiği uygulamalardır (Molina, Castro & Castro, 2007). Bu çalışmanın kritik noktalarından biri, DNR'nin öğretim hakkındaki fikirlerini dikkate alarak bir öğretim deneyi oluşturmaktır. Dolayısıyla öğrencilerin anlama ve düşünme yollarını geliştirmenin amaçlandığı bu uygulamada, görevler hem öğrencilerin zihinsel ihtiyaçlarını karşılayacak nitelikte hem de çözme ihtiyacı hissedecekleri nitelikte görevler olmalıydı. Öğretim deneyi sürecinde öğrencilerin nasıl düşündüklerinin araştırılmasında ve ilişkileri fark etmelerinin sağlanmasında, öncelikle onların bireysel olarak çalışıp daha sonra grup olarak tartışabilecekleri bir ortam oluşturulmuştur. Böylece öğrencilerin birbirlerinden öğrenmeleri imkânı da olmuştur. Sonrasında ise çalışılan problem durumu hakkında sınıfça tartışılarak, herkesin fikrini ifade edebileceği bir ortam oluşturulmuştur. Böylece öğrenciler, hem kendi fikirlerini matematiksel olarak ifade etmeye zorlandıklarından hem de arkadaşlarının çözüm yollarını öğrendiklerinden farklı düşünme yolları geliştirmişlerdir.

İfadelerinden anlaşıldığı üzere öğrenciler, görevleri ve sınıf ortamını eğlenceli buldukları ölçüde, derse katılım sağlamışlar ve tartışma ortamı gerçekleşmiştir. Bu şekilde kendilerini daha rahat hissettiklerinden, sorunun çözümü hakkında düşündüklerini de çekinmeden ifade edebilmişlerdir. Oysa Harel (2008a) matematik öğretiminin eğlenceye ve sosyal aktivitelere dayalı olmaması gerektiğini belirtmiştir. Ancak öğrenciler, öğrenci günlüklerine o günü değerlendirirken, neredeyse her gün ne kadar eğlendiklerinin de yorumu yaparak değerlendirmişlerdir. Eğlendikleri ölçüde kendilerini rahat hissettikleri ve fikirlerini ifade ettikleri gözlemlendiğinden öğrencilerin, sosyal olarak eğlenmeleri, motivasyonlarını artırıcı bir unsur olarak görülmektedir. Clements (2001, s. 270) okul öncesi dönemde matematik öğretiminin, uğraştıran problemlerden ve eğlenceden oluşması gerektiğini düşünmektedir. Öğretim deneyinin sonuçlarına göre, matematik öğretiminde eğlence faktörünün ve tabi ki öğrencilerin zihinsel olarak zorlanacakları ve çözmek isteyecekleri problemlerle uğraşmaları gerekliliğinin, ortaokul yıllarında da devam ettiği görülmektedir.

Uygulanan öğretim deneyinde öğrencilerin, belirlenen konularda farklı çözüm yolları bulabilmeleri ve kavramsal öğrenme gerçekleştirmeleri amaçlanmaktadır. Ancak gelecek akademik yaşamları düşünüldüğünde öğrencilerin herhangi bir problemin birden çok çözüm yolu olabileceğini düşünmeleri ve edindikleri bilgilerin 'neden öyle olduğunu' düşünmeyi alışkanlık haline getirerek sorgulayabilmeleri, bu çalışmanın gizli ve en büyük amacıdır. Bu çalışmanın belirtilen noktalarda öğrencilerde bir farkındalık oluşturduğu düşünülmektedir.

5.5. Öneriler

Öğretmenlere öneriler;

- Öğrenciler karşılaştıkları yeni bilgiyle mevcut bilgilerini ilişkilendirerek öğrenmektedirler. Bu ilişkilendirme ne kadar etkili yapılırsa, öğrenme de o kadar amacına ulaşmaktadır. Dolayısıyla konular, daha önceden bildikleri konularla ilişkilendirilerek öğretilmelidir. İlişkilendirme, genelleme sürecinin de ilk adımıdır. Öğrenciler verilen problem durumu, matematiksel objeler vb. arasında benzerlik ilişkisi araştırarak genelleme sürecine başlamış olurlar. Öğrencilere çeşitli problem durumları, objeler, fenomenler arasındaki benzerlik ilişkilerini fark etmelerini sağlayacak sorular sorulmalı, benzerlik ilişkisinin araştırılacağı şekilde düşünmeye teşvik edilmelidirler. Böylece kendi genellemelerini oluşturmaları sağlanmalıdır.
- Herhangi bir bilgi öğrendiklerinde, neden öyle olduğunu düşünmeleri hakkında öğrenciler cesaretlendirilmelidir. Sadece matematik dersi için değil, günlük hayatta karşılaştıkları bilgileri de nedenleri hakkında sorgulayarak ve düşünerek elde etmeleri sağlanmalıdır. Bunun için “neden öyle olduğu” hakkında düşünme alışkanlığı kazandırılmalıdır. Ancak bu yolla günümüzün ihtiyaç duyduğu düşünen ve sorgulayan insanlar yetiştirilebilir.
- Öğrencilere kural verilip aynı kuralın tekrar tekrar uygulanmasını içeren sorulardan ziyade onların zihinsel ihtiyaçlarını karşılayacak ve çözmek için istek duyacakları, ilginç bulup merak edecekleri problem durumları oluşturulmalıdır. Böylece öğrencilerin istedik düşünme yolları hakkında muhakeme etmeleri sağlanacaktır. Oluşturulan problem durumu, öğrencinin anlayabileceği kadar açık ve anlaşılır olmalı, öğrenci gözünden ‘uzaylı’ olarak değerlendirilebilecek sorular olmamalıdır.
- Öğrencilere sunulan problem durumları öğrencilerin ilişkilendirme yapabilecekleri, ilişkilerin sabit olup olmamasının araştırılacağı ve daha sonra verilen durumun ötesinde genişletebileceği sorular olmalıdır. Böylece öğrenciler genelleme sürecine alışmış olacaklar ve bu düşünce şeklini diğer derslerinde de kullanabileceklerdir.
- Öğrencilerin fikirlerini rahatlıkla ifade edebilecekleri sınıf ortamları oluşturulmalıdır. Mümkün olduğunca çok öğrencinin ne düşündüğünü ifade etmesi sağlanmalı ve ifade edilen fikirler/çözüm yolları üzerinden bütün sınıfın düşünerek farklı çözüm yolları görmeleri sağlanmalıdır. Öğrencilerin düşüncelerini sözel olarak ifade edebilmeleri, diğer temsil biçimleriyle de ifade edebilmelerinde

önemlidir. Öğrencilerin matematiksel kavramı/problem çözümünü sözel, cebirsel, grafik, tablo gibi temsillerle görmeleri kavramsal öğrenmenin gerçekleşmesi açısından önemlidir. Dolayısıyla farklı temsillerin birbirleriyle ilişkili olarak öğretilmesi yani “3 kuralı” uygulanması, matematik öğretiminde önem kazanmaktadır.

- Hem öğretim deneyinin sonuçlarına göre hem de alan yazındaki bazı çalışmalarda belirtildiği gibi öğrenciler toplamsal düşünmeye daha alıştırlar. Bu durum ilişkilerin araştırıldığı, değişimin analiz edildiği sorularda da kendini göstermektedir. Öğrencilerin çarpımsal düşünmeyi öğrenecekleri sorular belirlenerek toplamsal düşünme gerektiren ve çarpımsal düşünme gerektiren farklı durumlar üzerinde muhakeme etmeleri sağlanmalıdır.
- Öğretmenin söylemek istediği ile öğrencinin anladığı arasında fark olduğunda, matematiksel iletişim çatışmaları başlamaktadır. Öğrenci söyleneni anlamadığından öğrenme de gerçekleşmez. O halde öğretmen, kavram yanlışlarını önleyecek şekilde açık ve anlaşılır bir dil kullanmalıdır.
- Matematiksel düşünmenin gerçekleşmesi ve gelişmesi için matematik dilinin kullanılması oldukça önemlidir. Sınıfta matematiksel gösterimlere ve kurallara uygun olarak ve matematiksel terminolojiyi doğru bir şekilde kullanmaya dikkat edilerek öğretim gerçekleştirilmelidir.

Araştırmacılara öneriler;

- Ellis (2004) genelleme taksonomisini, sekizinci sınıf öğrencileriyle ve lineer fonksiyonlar konusu üzerinden çalışarak geliştirmiştir. Bu çalışmada ise sekizinci sınıflarla örüntü ve ilişkiler, değişimin analizi, denklemler konusu çalışılmıştır. Farklı konuların genelleme taksonomisiyle analiz edilmesiyle taksonomiye yeni kategoriler eklenmiştir. Bir sonraki çalışma farklı bir örneklem ve farklı bir konu hakkında gerçekleştirilebilir. Böylece taksonomiye katkı sağlanabilir.
- DNR tabanlı öğretim yoğun matematiksel düşünme gerektirdiğinden yaş grubu olarak küçük sınıflarda uygulanması zor olabilir. Öte yandan öğrenciler matematiksel düşünmeye ve tartışmaya daha erken yaşlarda başlamalı ve bunu alışkanlık haline getirmelidirler. Dolayısıyla bir sonraki çalışmada yaş grubu küçük olan öğrencilerle çalışarak öğrencilerin nasıl muhakeme ettikleri belirlenebilir.

- Eğim, hız gibi kavramların değişkenlerin birbirine göre değişiminin muhakemesi şeklinde öğretilmesi, öğrencilerin kavramsal bilgi oluşturmaları açısından önemlidir. Değişkenlerin birbirine göre değişimi fonksiyonel düşünmenin de başlangıcı olduğundan eğim kavramının öğretilmesinde fonksiyonel düşünmenin durumu çalışılabilir.

Program yapıcılara neriler;

- Ortaokul matematik programında cebirsel düşünme gerektiren konular gelişimsel olarak ve birbirleriyle bütünleşik şekilde düzenlenmelidir. rnt ve ilişkiler, değişimin analizi, denklemler konuları birbirleriyle ilişkilendirilerek ve öğrenmelerini diğerlerinin üzerine kurabilecekleri şekilde öğretildiği takdirde lisede öğrenecekleri fonksiyon konusuna ve dolayısıyla fonksiyonel düşünmeye sağlam bir temel oluşturulur. 2016-2017 yılında uygulamaya konulacak olan ilkokul matematik programı incelendiğinde bu konunun dikkate alınarak olumlu değişiklikler yapıldığı söylenebilir. Benzer değişikliklerin önemi vurgulanan noktalar ışığında ortaokul matematik müfredatında yapılması da önerilmektedir. Cebir dersi düşünme yeteneklerinin gelişimini destekler nitelikte öğretilmelidir.

KAYNAKLAR

- Aiken, L. R. (1972). Language factors in learning mathematics. *Review of Educational Research*, 42(3), 359-385.
- Akkan, Y. (2016). Cebirsel düşünme. E. Bingölbali & S. Arslan & İ. Ö. Zembat (Ed.), *Matematik eğitiminde teoriler içinde* (s. 43-63). Ankara: Pegem Akademi.
- Akkaya, R. (2006). *İlköğretim altıncı sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanında karşılaşılan kavram yanlışlarının giderilmesinde etkinlik temelli yaklaşımın etkililiği*. Yüksek Lisans Tezi, Abant İzzet Baysal Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bolu.
- Akkaya, R., & Durmuş, S. (2006). İlköğretim 6-8. sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanındaki kavram yanlışları. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 31, 1-12.
- Akkoç, H. (2006). Fonksiyon kavramının çoklu temsillerinin çağrıştırdığı kavram görüntüleri. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 30(30), 1-10.
- Akkoç, H., & Tall, D. (2002). The simplicity, complexity and complication of the function concept. In Anne D. Cockburn & Elena Nardi (Eds.) *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 25-32. Norwick, UK.
- Alexandrou-Leonidou, V., & Philippou, G. N. (2011). Can they “see” the equality? In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the seventh congress of the european society for research in mathematics education*, Poland: University of Rzeszów,
- Alibali, M. W., Knuth, E. J., Hattikudur, S., McNeil, N. M., & Stephens, A. C. (2007). A longitudinal examination of middle school students' understanding of the equal sign and equivalent equations. *Mathematical Thinking and Learning*, 9(3), 221-247.

- Amit, M., & Neria, D. (2010). Assessing a modelling process of a linear pattern task. In R. A. Lesh, P. L. Galbraith, W. Blum, & A. Hurford (Eds.), *Modeling student's modeling competencies. ICTMA 13* (pp. 213–221). New York: Springer.
- Arcavi, A. (1995). Teaching and learning algebra: Past, present, and future. *The Journal of Mathematical Behavior*, 14(1), 145-162.
- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215-241.
- Arzarello, F., Bazzini, L., & Chiappini, G. (1995). The construction of algebraic knowledge: towards a socio-cultural theory and practice. In L. Meira & D. Carraher (eds.), *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, Recife, Brazil, pp. 119–134.
- Arzarello, F., Bazzini, L., & Chiappini, G. P. (1994). Intensional semantics as a tool to analyze algebraic thinking. *Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Torino*, 52(1), 105-125.
- Bacanlı, H. (2009). *Eğitim psikolojisi*. Ankara: Asa.
- Baki, A., Kartal, T. (2002). (2004). Kavramsal ve işlemsel bilgi bağlamında lise öğrencilerinin cebir bilgilerinin karakterizasyonu. *Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, 2(1), 27-46.
- Bakker, A., Doorman, M., & Drijvers, P. (2003). *Design research on how it may support the development of symbols and meaning in mathematics education*. Congress on Education (ORD), Kerkrade.
- Barbosa, A. (2011). Patterning problems: sixth graders' ability to generalize. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the seventh congress of the european society for research in mathematics education* (pp. 420-428).
- Baroody, A. J., Feil, Y., & Johnson, A. R. (2007). An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 115-131.
- Bayazıt, İ. (2011). Öğretmen adaylarının grafikler konusundaki bilgi düzeyleri. *Gaziantep Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 10(4), 1325 -1346.

- Bay-Williams, J. M. (2001). What is Algebra in elementary school? *Teaching Children Mathematics*, 8(4), 196.
- Becker, J. R., & Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. In H. Chick & J.L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 4-121 through 4- 128). Melbourne, Australia: University of Melbourne.
- Becker, J. R., & Rivera, F. (2006). Sixth graders' figural and numerical strategies for generalizing patterns in algebra'. In Alatorre, S., Cortina, J., Sáiz, M. & Méndez, A. (eds), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Mérida, Mexico, Universidad Pedagógica Nacional, 2, pp. 95-101.
- Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching. In N. Berdnarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 3-12). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.
- Bell, A. (1995). Purpose in school algebra. *The Journal of Mathematical Behavior*, 14(1), 41-73.
- Bell, A. (1996). Algebraic thought and the role of a manipulable symbolic language. In N. Berdnarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 3-12). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.
- Bell, A. (1988). Algebra-Choices in curriculum design. In A. Borbas (Ed.), *Proceedings of the 12th International Conference for the Psychology of Mathematics Education 1*, (pp. 147-153). Veszprem. Hungary.
- Bills, L., & Rowland, T. (2009). Examples, generalisation and proof. *Advances in Mathematics Education*, 1(1), 103-116.
- Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom. Transforming thinking, transforming practice*. Portsmouth: Heinemann.
- Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446.

- Booker, G. (2009). *Algebraic Thinking: generalising number and geometry to express patterns and properties succinctly*. Griffith: Griffith University Brisbane.
- Boz, N. (2013). Matematiğin temel yapı taşlarından “değişken”. İ.Ö. Zembat, M F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır & A. Delice (Eds.), *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar içinde* (s. 329-338). Ankara: Pegem.
- Brown, A. L. (1992). Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *The Journal of the Learning Sciences*, 2(2), 141-178.
- Cañadas, M. C., Castro, E., & Castro, E. (2011). Graphical representation and generalization in sequences problems. In M. Pytlak, E. Swoboda & T. Rowland (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 460 - 469). Rzeszów, Poland.
- Carpenter, T. P., & Levi, L. (2000). *Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades*. (Report No. 002). Madison, WI: National Center For Improving Student Learning And Achievement In Mathematics And Science.
- Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM*, 40(1), 3-22.
- Carraher, D., Schliemann, A. D., & Brizuela, B. M. (2001). Can young students operate on unknowns? In M. v. d. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the Twenty-fifth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 1 (pp. 130-140). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.
- Cheng, D. S. (2010). *Connecting proportionality and slope: Middle school students' reasoning about steepness*. Doctoral Dissertation, Boston University School Of Education, Boston.
- Chiappini, G. (2011). The role of technology in developing principles of symbolical algebra. In Pytlak M., Rowland T. & Swoboda E. (eds), *Proceedings of CERME 7*, (pp. 429-439). University of Rzeszow, Poland.
- Chua, B. L., & Hoyles, C. (2009). Generalisation and perceptual agility: How did teachers fare in a quadratic generalising problem? In Joubert, M. (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* 29(2), 13-18.

- Chua, B., & Hoyles, C. (2011). Secondary school students' perception of best help generalizing strategies. In *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (Cerme).
- Clement, J. (1982). Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education*, 3(1), 16-30.
- Clement, J., Lochhead, J., & Monk, G. S. (1981). Translation difficulties in learning mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 88(4), 286-290.
- Clements, D. H. (2001). Mathematics in the preschool. *Teaching children mathematics*, 7(5), 270.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (1997). Computers support algebraic thinking. *Teaching Children Mathematics*, 3, 320-325.
- Cobb, P. (1994). Where is the mind? Constructivist and sociocultural perspectives on mathematical development. *Educational Researcher*, 23(7), 13-20.
- Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. In A.E. Kelly, R. Lesh, & J. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching* (pp. 68-95). New York: Routledge.
- Cobb, P., & Steffe, L. P. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14, 83-94.
- Cobb, P., Boufi, A., McClain, K., & Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(3), 258-277.
- Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2014). Design research: An analysis and critique. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education*, 481-503.
- Cooper, R. (1991). The role of mathematical transformations and practice in mathematical development. In L. Steffe (Ed.), *Epistemological Foundations of Mathematical Experience*. New York: Springer-Verlag.

- Creswell, J. W. (2007). *Qualitative inquiry & research design: Choosing among five approaches* (2nd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Çıkla, O. A. (2004). *The effects of multiple representations-based instruction on seventh grade students' algebra performance, attitude toward mathematics, and representation preference*. Doctoral Dissertation, Middle East Technical University School Of Natural And Applied Sciences, Ankara.
- Davydov, V. V. (1990). *Types of generalization in instruction: logical and psychological problems in the structuring of school curricula*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Dede, Y., & Argün, Z. (2003). Cebir, öğrencilere niçin zor gelmektedir? *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24, 180-185
- Dede, Y., Yalın, H. İ., & Argün, Z. (2002). *İlköğretim 8. sınıf öğrencilerinin değişken kavramının öğrenimindeki hataları ve kavram yanlışları*. V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, 16-18.
- Design-Based Research Collective. (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher*, 32(1), 5–8. doi: 10.3102/0013189X032001005.
- Devries, R. (2000). Vygotsky, Piaget, and education: A reciprocal assimilation of theories and educational practices. *New Ideas in Psychology*, 18(2), 187-213.
- Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. In A. Bishop, S. Mellin-Olsen & J. V. Dormolen (Eds), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp.63-85). Dordrecht: Kluwer A.P.
- Duffy, A. M. (2006). *Students' ways of understanding aromaticity and electrophilic aromatic substitution reactions*. Doctoral Dissertation, University of California, San Diego.
- Eisenberg, T. (1991). Functions and associated learning difficulties. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 140-152). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Elia, I., & Spyrou, P. (2006). How students conceive function: a triarchic conceptsemiotic model of the understanding of a complex concept. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 3(2), 256–272.

- Ellis, A. B. (2007). Connections between generalizing and justifying: Students' reasoning with linear relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 194-229.
- Ellis, A. B. (2007). A taxonomy for categorizing generalizations: Generalizing actions and reflective generalizations. *The Journal of the Learning Sciences*, 16(2), 221-262.
- Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 105-121.
- Falkner, K. P., Levi, L., & Carpenter, T. P. (1999). Children's understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics*, 6(4), 232.
- Freudenthal, H. (2002). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. United States of America: Kluwer Academic.
- Friel, S. N., & Markworth, K. A. (2009). A framework for analyzing geometric pattern tasks. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15(1), 24-33.
- Gagatsis, A., & Christou, C., & Elia, I. (2004). The nature of multiple representations in developing mathematical relationships. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 14, 150-159.
- Gambrill, E. (1999). Evidence-based practice: An alternative to authority-based practice. *Families in Society: The Journal of Contemporary Social Services*, 80(4), 341-350.
- Garcia-Cruz, J. A., & Martinon, A. (1997). Actions and invariant schemata in linear generalising problems. In E. Pehkonen (ed.) *Proceedings of the 21th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, University of Helsinki, Vol. 2, 289-296.
- García-Cruz, J. A. & Martinon, A. (1998). Levels of Generalization in Linear Patterns. *36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 2: 329-336.
- Giaquinto, M. (2007). *Visual thinking in mathematics*. New York: Oxford University.
- Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M., Aké, L., Etchegaray, S., & Lasa, A. (2015). Algebraic reasoning levels in primary and secondary education. In *CERME 9-Ninth*

- Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 426-432).
- Gravemeijer, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(5), 443-471.
- Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. *Educational Design Research*, New York: Raudledge, 17-51.
- Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for research in Mathematics Education*, 116-140.
- Güner, P. (2012). *Matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinde DNR tabanlı öğretime göre anlama ve düşünme yollarının incelenmesi*. Yüksek Lisans Tezi, Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Harel, G. (1998). Two dual assertions: The first on learning and the second on teaching (or vice versa). *The American Mathematical Monthly*, 105(6), 497-507.
- Harel, G. (2007). *What is mathematics? A pedagogical answer with a particular focus on proving*. In Third APEC-Tsukuba International Conference on Innovative Mathematics Teaching and Learning Through Lesson Study, Tokyo, Japan.
- Harel, G. (2008a). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, Part I: focus on proving. *ZDM* 40(3), 487-500.
- Harel, G. (2008b). A DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, Part II: with reference to teacher's knowledge base. *ZDM*, 40(5), 893-907.
- Harel, G. (2008c). What is mathematics? A pedagogical answer to a philosophical question. *Proof and Other Dilemmas: Mathematics and Philosophy*, 265-290.
- Harel, G. (2013). DNR-Based curricula: The case of complex numbers. *Journal of Humanistic Mathematics*, 3(2), 2-61.
- Harel, G., & Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 11(1), 38-42.
- Hatano, G. (2003). Foreword. In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The Development of Arithmetic Concepts and Skills: Constructing Adaptive Expertise* (pp. xi-xiii). Mahwah, NJ: Erlbaum.

- Herscovics, N., & Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *The Mathematics Teacher*, 73(8), 572-580.
- Hersh, R. (1979). Some proposals for reviving the philosophy of mathematics. *Advances in mathematics*, 31(1), 31-50.
- Hickerson, J. A. (1959). Similarities between teaching language and arithmetic. *The Arithmetic Teacher*, 6(5), 241-244.
- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Erlbaum
- Hunter, J. (2010). Developing early algebraic reasoning through exploration of the commutative principle. In Joubert, M. and Andrews, P. (Eds.) *Proceedings of the British Congress for Mathematics Education*. Proceedings of the British Congress for Mathematics Education. Manchester Univesity, 105-112.
- Joram, E., Hartman, C., & Trafton, P. R. (2004). As people get older, they get taller: an integrated unit on measurement, linear relationships, and data analysis. *Teaching Children Mathematics*, 10(7), 344-352.
- Kaput, J. J. (2000). Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), *Mathematics Classrooms that Promote Understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning. *Algebra in the Early Grades*, 5-17.
- Kieran, C. (1989). A perspective on algebraic thinking. In G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the 13th Annial Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 2*, (pp. 163171), Paris, France: Program Committee.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York, NY: Macmillan.
- Kieran, C. (2004a). Algebraic thinking in the early grades: What is it?. *The Mathematics Educator*, 8(1), 139-151.

- Kieran, C. (2004b). The core of algebra: Reflections on its main activities. In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Eds), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 21–33). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic.
- Kieren, T. E., & Pirie, S. E. (1991). Recursion and the mathematical experience. In L. Steffe (ed.), *The Epistemology of Mathematical Experience*, Springer Verlag Psychology Series, New York, pp. 78-101.
- Kilpatrick, J. (1987). What constructivism might be in mathematics education. In J. C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the Eleventh International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 2-27). Montreal, Canada: University of Quebec at Montreal.
- Kirwan, J. V. (2015). *Preservice secondary mathematics teachers' knowledge of generalization and justification on geometric-numerical patterning tasks*. Doctoral Dissertation, Illinois State University, USA.
- Klibanoff, R. S., Levine, S. C., Huttenlocher, J., Vasilyeva, M., & Hedges, L. V. (2006). Preschool children's mathematical knowledge: The effect of teacher "math talk.". *Developmental Psychology*, 42(1), 59.
- Klibanoff, R. S., Levine, S. C., Huttenlocher, J., Vasilyeva, M., & Hedges, L. V. (2006). Preschool children's mathematical knowledge: The effect of teacher" math talk.". *Developmental Psychology*, 42(1), 59.
- Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 297-312.
- Knuth, J. E. (2000). Student understanding of the Cartesian Connection: An exploratory study. *Journal of Research in Mathematics Education*, 31(4), 500-508.
- Kuş, E. (2006). *Sosyal bilimlerde bilgisayar destekli nitel veri analizi: Örnek program NVivo ile gösterimler*. Ankara: Anı.
- Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics In School*, 7(4), 23-26.
- Küchemann, D. (1981), Algebra. In K. M. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16*, London: John Murray, (pp. 102-119).

- Lannin, J. K. (2003). Developing algebraic reasoning through generalization. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 8(7), 342.
- Lannin, J. K. (2004). Developing mathematical power by using explicit and recursive reasoning. *Mathematics Teacher*, 98(4), 216-223.
- Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(3), 231-258.
- Lear, J. (1988). *Aristotle: the desire to understand*. USA: Cambridge University.
- Lerman, S. (1989). Constructivism, mathematics and mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 20(2), 211-223.
- Lew, H. C. (2004). Developing algebraic thinking in early grades: Case study of Korean elementary school mathematics. *The Mathematics Educator*, 8(1), 88-106.
- Liang Chua, B., & Hoyles, C. (2009). Generalization and perceptual agility: how did teachers fare in a quadratic generalizing problem. In M. Joubert(Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* (pp.13-18), Vol 29(2).
- Lim, K. H. (2006). *Students' mental acts of anticipating in solving problems involving algebraic inequalities and equations*. Doctoral Dissertation, University of California, San Diego.
- Lim, K. H. (2009). Provoking Intellectual Need. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15(2), 92-99.
- Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: A definition of pre-algebra. *The Journal of Mathematical Behavior*, 14(1), 113-120.
- Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: A definition of prealgebra. *The Journal of Mathematical Behaviour*, 14, 113-120.
- Lobato, J. (2003). How Design Experiments Can Inform a Rethinking of Transfer and ViceVersa. *Educational Researcher*, 32(1), 17-20.
- Lobato, J., & Siebert, D. (2002). Quantitative reasoning in a reconceived view of transfer. *The Journal of Mathematical Behavior*, 21(1), 87-116.

- Markovits, Z., Eylon, B. & Bruckheimer, M. (1986). Functions today and yesterday. *For the Learning of Mathematics*, 6(2), 18-24.
- Maskiewicz, A. L. (2006). *Rethinking biology instruction: The application of DNR-based instruction to the learning and teaching of biology*. Doctoral Dissertation, University Of California, San Diego.
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (eds), *Approaches to Algebra*, Kluwer, Dordrecht/Boston/London, pp. 65–86.
- Mason, J., Stephens, M., & Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 10-32.
- McKenney, S., Nieveen, N., & van den Akker, J. (2006). Design research from a curriculum perspective. *Educational Design Research*, 67-90.
- McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2005). Knowledge change as a function of mathematics experience: All contexts are not created equal. *Journal of Cognition and Development*, 6(2), 285-306.
- MEB (2009). *İlköğretim matematik dersi 1-5. sınıflar öğretim programı*. Ankara: Talim ve Terbiye Kurumu Başkanlığı.
- MEB (2013). *İlköğretim matematik dersi 5, 6, 7 ve 8. sınıflar öğretim programı*. Ankara: Talim ve Terbiye Kurumu Başkanlığı.
- MEB (2015). *İlkokul matematik dersi 1, 2, 3, 4. sınıflar öğretim programı*. Ankara: Talim ve Terbiye Kurumu Başkanlığı.
- Miles, M. & Huberman, M. (1994). *Qualitative data analysis*. London: Sage.
- Miller, F. K. (2000). Representational tools and conceptual change: The young scientist's tool kit. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 21(1), 21-25.
- Milli Eğitim Bakanlığı (2012). TIMSS 2007. 8. Sınıf açıklanan matematik soruları, https://pisavetimsssinavlari.files.wordpress.com/2012/01/timss2007_8-sinif_mat_soru.pdf. sayfasından erişilmiştir.
- Milli Eğitim Bakanlığı (2014). TIMSS 2011. 8. Sınıf açıklanan matematik soruları, https://pisavetimsssinavlari.files.wordpress.com/2014/11/timss2011_8-sinif_matematik_sorulari.pdf sayfasından erişilmiştir.

- Molina, M., Castro, E., & Castro, E. (2007). Teaching experiments within design research. *The International Journal of Interdisciplinary Social Sciences*, 2(4), 435-440.
- Molina, M., Castro, E., & Mason, J. (2008). Elementary students' approaches to solving true/false number sentences. *Revista de Investigacion en Didactica de la Matematica PNA* 2(2), 75-86.
- Mousoulides, N., & Gagatsis, A. (2004). Algebraic and geometric approach in function problem solving. In M. Johnsen Hoines & A. Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 385-392). Bergen, Norway: Bergen University College.
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Nesher, P. (1986). Are mathematical understanding and algorithmic performance related?. *For the Learning of Mathematics*, 6(3), 2-9.
- Nobre, S., Amado, N., Carreira, S., & Ponte, J. P. (2011). Algebraic thinking of grade 8 students in solving word problems with a spreadsheet. In M. Pytlak, E. Swoboda & T. Rowland (Eds.), *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 521–531). Poland: ERME, University of Rzeszów.
- Oktaç, A. (2010). Birinci dereceden tek bilinmeyenli denklemler ile ilgili kavram yanlışları. E. Bingölbalı & M. F. Özmantar (Ed.) içinde. *Matematiksel zorluklar ve çözüm önerileri 2*, (pp.241-262). Ankara: Pegem Akademi.
- Orton, A., & Orton, J. (1999). Pattern and Approach to Algebra. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 104-124). London: Cassel.
- Orton, A. and Orton, J. (1999). Pattern and the approach to algebra. In A. Orton (Ed.) *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 104-120). London: Cassell.
- Panasuk, R., & Lewis, S. (2012). Constructivism: Constructing meaning or making sense? *International Journal of Humanities and Social Sciences*, 2(20), 1-11.
- Piaget, J. (1964). Development and learning. In R. E. Ripple & V. N. Rockcastle (Eds.), *Piaget Rediscovered*, (pp. 7-20).

- Piaget, J. (1970). *Structuralism*. New York: Basic.
- Piaget, J. (1978). *Behaviour and evolution*. New York: Pantheon.
- Polya, G. (1957). *How to Solve It: a new aspect of mathematical method*. New Jersey: Princeton University.
- Powell, A. B., Francisco, J. M., & Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *The Journal of Mathematical Behavior*, 22(4), 405-435.
- Pytlak, M. (2011). Algebraic Reasonings among Primary School 4th Grade Pupils. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.) *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, (pp. 532-541).
- Radford, L. (1996). Some reflections on teaching algebra through generalization. In N. Berdnarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.) *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 107–114). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.
- Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.
- Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sa 'iz, & A. Me 'ndez (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American chapter of the international group for the psychology of mathematics education 1*, (pp. 2–21). Me 'rida, Me 'xico: Universidad Pedagogo 'gica Nacional.
- Radford, L. (2008). Theories in mathematics education: A brief inquiry into their conceptual differences. *Report of Survey Team*, 7, 1-17.
- Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization* (pp. 303-322). Berlin: Heidelberg Springer.
- Radford, L., & Puig, L. (2007). Syntax and meaning as sensuous, visual, historical forms of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 66(2), 145-164.
- Reeves, T. C. (2006). Design research from a technology perspective. *Educational Design Research*, 1(3), 52-66.

- Resnick, L. B. (1986). Cognition and Instruction: Recent Theories of Human Competence and How It Is Acquired. In B. L. Hammonds (Ed.) *Psychology and learning: The master lecture series 1* (pp. 123-187). Copyright 1985 by American Psychological Association.
- Rittle-Johnson, B., & Schneider, M. (2014). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. In R. Kadosh, & A. Dowker (Eds.), *The Oxford handbook of numerical cognition*. Oxford, UK: Oxford University.
- Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology*, 93(2), 346.
- Rivera, F. D. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics*, 73, 297-328.
- Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2007). Abduction in pattern generalization. In W. Jeong-Ho, L. Hee-Chan, P. Kyo-Sik, & J. Dong-Yeop (Eds.), *Proceedings of the 31st conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 97–104). Seoul, Korea: Korea Society of Educational Studies in Mathematics.
- Rosnick, P. (1981). Some misconceptions concerning the concept of variable. *The Mathematics Teacher*, 74(6), 418-450.
- Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. New York and London: Routledge.
- Sasman, M. C., & Linchevski, L., & Olivier, A. (1999). The influence of different representations on children's generalisation thinking processes. In J. Kuiper (Ed.), *Proceedings of the 7th Annual Conference of the Southern African Association for Research in Mathematics and Science Education* (pp. 406–415). Harare, Zimbabwe: University of Harare.
- Schmittau, J. (2011). The role of theoretical analysis in developing algebraic thinking: A Vygotskian perspective. *Early algebraization* (pp. 71-85). Berlin: Heidelberg, Springer.
- Schoenfeld, A. (1995). Report of working group 1. In Lacampagne C. (Ed.), *The Algebra Initiative Colloquium* (pp. 11–18). Washington: DC.

- Schoenfeld, A. H., & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *The Mathematics Teacher*, 81(6), 420-427.
- Schoenfeld, A. H., & Conner, E. (2002). Looking for leverage: Issues of classroom research on “Algebra for All”. In *Proceedings of the International Conference on the Teaching of Mathematics (at the Undergraduate Level)* (pp. 1-6). Crete, Greece.
- Senemoğlu, N. (2005). *Gelişim öğrenme ve öğretimi*. Ankara: Gazi.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36.
- Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *The Journal of Mathematical Behavior*, 14(1), 15-39.
- Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification the case of algebra. In P. Cobb (Ed.), *Learning Mathematics*, (pp. 87-124). Netherlands: Springer.
- Shayer, M. (2003). Not just Piaget; not just Vygotsky, and certainly not Vygotsky as alternative to Piaget. *Learning and Instruction*, 13(5), 465-485.
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145.
- Simon, M. A. (2000). Research on the development of teachers: The teacher development experiment. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 335–360). Mahwah, N.J.: Erlbaum.
- Skemp, R. (1976). Instrumental understanding and relational understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.
- Skemp, R. R. (1989). *Mathematics in the primary school*. United Kingdom: Routledge.
- Stacey, K., & MacGregor, M. (1997). Ideas about symbolism that students bring to algebra. *The Mathematics Teacher*, 90(2), 110-113.
- Stanton, M., & Moore-Russo, D. (2012). Conceptualizations of slope: A review of state standards. *School Science and Mathematics*, 112(5), 270-277.
- Steffe L. P., & Ulrich C. (2013) Constructivist teaching experiment. In: Lerman S. (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education*, (pp. 102–109). Berlin: Springer.

- Steffe, L. P. (1991). The learning paradox: A plausible counterexample. In L. P. Steffe (Ed.) *Epistemological Foundations of Mathematical Experience*, (pp. 26-44). New York: Springer.
- Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research on design in mathematics and science education* (pp. 267–307). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Stump, S. (1999). Secondary mathematics teachers' knowledge of slope. *Mathematics Education Research Journal*, 11(2), 124-144.
- Stump, S. L. (2001). High school precalculus students' understanding of slope as measure. *School Science and Mathematics*, 101(2), 81-89.
- Tall, D. (1997). Functions and calculus. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 289–325). Dordrecht: Kluwer.
- Tanışlı, D., & Özdaş, A. (2009). İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin örüntüleri genellemede kullandıkları stratejiler. *Educational Sciences: Theory & Practice*, 9(3), 1453-1497.
- Tanışlı, D., & Yavuzsoy Köse, N. (2011). Lineer şekil örüntülerine ilişkin genelleme stratejileri: Görsel ve sayısal ipuçlarının etkisi. *Eğitim ve Bilim*, 36(160).
- Twohill, A. (2013). Algebraic reasoning in primary school: developing a framework of growth points. Smith, C. (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* 33(2).
- Ursavaş, N. (2014). *EGS (DNR) tabanlı öğretim yönergesi kullanılarak öğretmen adaylarının sahip oldukları biyolojik anlama şekilleri ve düşünme yollarının geliştirilmesi*. Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Usiskin, Z. (1987). Why elementary algebra can, should, and must be an eighth-grade course for average students. *The Mathematics Teacher*, 80(6), 428-438.
- Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. *The Ideas of Algebra, K-12*, 8, 19.

- Van de Walle, J. A., Karp, K., & Bay-Williams, J. M. (2003). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*. Boston: Pearson.
- Van den Akker, J., Gravemeijer, K., McKenney, S., & Nieveen, N. (2006). Introducing educational design research. *Educational Design Research*, 1, 3-7.
- Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight*. New York: Academic.
- Von Glasersfeld, E. (1984). An introduction to radical constructivism. *The invented reality*, 17-40.
- Von Glasersfeld, E. (1987). Learning as a constructive activity. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 3-18). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Von Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning*. Bristol: Falmer.
- Vygotsky, L. S. (1980). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard University, Cambridge.
- Vygotsky, L. S. (1986). *Thought and language*. England: The MIT.
- Walter, J. G., & Gerson, H. (2007). Teachers' personal agency: Making sense of slope through additive structures. *Educational Studies in Mathematics*, 65(2), 203-233.
- Wilson, K., Ainley, J., & Bills, L. (2005). Spreadsheets, pedagogic strategies and the evolution of meaning for variable. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Melbourne: PME.
- Windsor, W. J. J. (2009). Algebraic thinking-more to do with why, than x and y. *Proceedings of the 10th International Conference "Models in Developing Mathematics Education"*. *The Mathematics Education into the 21st Century Project*. Saxony, Germany.
- Yamada, A. (2000). Two patterns of progress of problem-solving process: From a representational perspective. *Proceedings of the 24th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Hiroshima, Japan.

- Yerushalmy, M. (1993). Generalization, induction, and conjecturing: A theoretical perspective. In L. Schwartz, M. Yerushalmy & B. Wilson (Eds.), *The geometric suppose: What is it a case of?* (pp. 57-84). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Yıldırım, A., Şimşek, H. (2005). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*, Ankara: Seçkin.
- Zazkis, R., & Liljedahk, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, 49(3), 379-402.
- Zembat, İ. Ö. (2007). Yansıma dönüşümü, doğrudan öğretim ve yapılandırmacılığın temel bileşenleri. *Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 27(1), 195-213.
- Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). 'Editor's introduction: What is mathematical visualization. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 1-8). Washington, America: DC.



EKLER



Ek-1. Öğretim Deneyi

GÖREV 1: Kuralını Bulunuz



Adım 1



Adım 2



Adım 3

1. Yukarıda verilen örüntüye göre 4. ve 5. adım nasıl görünüyor olabilir? Lütfen çizin.
2. Bir cümle ile 10. adımın neye benzeyeceğini ifade ediniz.
3. Bu örüntünün herhangi bir terimini veren kuralı bir ya da iki cümle ile nasıl ifade edersiniz? Bu ifadenizi matematiksel olarak yazınız?
4. Bu örüntünün kuralını farklı bir yoldan daha bulmayı deneyiniz?

GÖREV 2: Kuralını Bulunuz



Adım 1



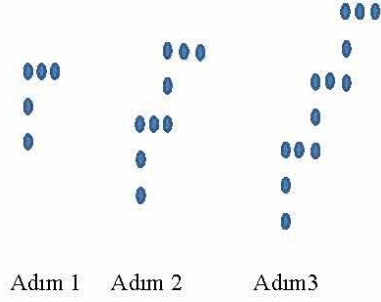
Adım 2



Adım 3

1. Yukarıda verilen örüntüye göre 4. ve 5. adım nasıl görünüyor olabilir? Lütfen çiziniz.
2. Bir cümle ile 10. adımın neye benzeyeceğini ifade ediniz.
3. Bu örüntünün herhangi bir terimini veren kuralı bir ya da iki cümle ile nasıl ifade edersiniz? Bu ifadenizi matematiksel olarak yazınız?
4. Bu örüntünün kuralını farklı bir yoldan daha bulmayı deneyiniz?

GÖREV 3: Basamak Örüntüsünün Kuralını Bulunuz

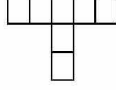


1. Yukarıda verilen örüntüye göre 4. ve 5. adım nasıl görüntüyor olabilir? Lütfen çiziniz.
2. Bu örüntünün herhangi bir terimini veren kuralı bir ya da iki cümle ile nasıl ifade edersiniz? Bu ifadenizi matematiksel olarak yazınız?
3. Bu örüntünün kuralını farklı bir yoldan daha bulmayı deneyiniz?

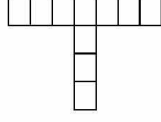
GÖREV 4: ‘T’ Örüntüsünün Kuralını Bulunuz



Adım 1



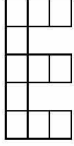
Adım 2



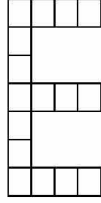
Adım 3

1. Yukarıda verilen “T” örüntüsüne göre 4. ve 5. adım nasıl görünüyordur olabilir? Lütfen çizin.
2. Bir cümle ile 10. adımın neye benzeyeceğini ifade ediniz.
3. Bu örüntünün herhangi bir terimini veren kuralı bir ya da iki cümle ile nasıl ifade edersiniz? Bu ifadenizi matematiksel olarak yazınız?
4. Bu örüntünün kuralını farklı bir yoldan daha bulmayı deneyiniz?

GÖREV 5: ‘E’ Örüntüsünün Kuralını Bulunuz



Adım 1



Adım 2

1. Bu örüntünün herhangi bir terimini veren kuralı matematiksel olarak ifade ediniz?
2. Bu örüntünün kuralını farklı bir yoldan daha bulmayı deneyiniz?
3. Yukarıdaki her bir şeklin çevre uzunluğunu belirleyiniz? Bunu yaparken her karenin kenar uzunluğunun 1 br olduğunu dikkate alınız. Buna göre 15. şeklin çevre uzunluğu kaç br'dir?

GÖREV 6: Tablodaki Sayıları Tamamlayınız

Sıra no	Terim
1	4
2	10
3	16
4	22
...	...
57	...
...	...
n	...

1. Yukarıda görülen tabloya göre 5. terim kaç olmalıdır?

2. Yukarıdaki tabloya göre 57. terim kaç olmalıdır?

3. Yukarıdaki tabloya göre n. terimi bulacak bir kural geliştiriniz? Bu kuralı nasıl bulduğunuzu açıklayınız?

GÖREV 7: Tablodaki Sayıları Tamamlayınız

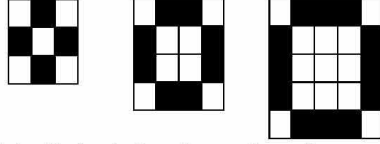
Sıra No	Terim
1	2
2	12
3	72
4	432
...	...
15	...
...	...
n	...

1. Yukarıda görülen tabloya göre 5. terim kaç olmalıdır?

2. Yukarıdaki tabloya göre 25. terim kaç olmalıdır?

3. Yukarıdaki tabloya göre n. terimi bulacak bir kural geliştiriniz? Bu kuralı nasıl bulduğumuzu açıklayınız?

GÖREV 8: Siyah ve Beyaz Fayans Sayılarını Bulunuz



Ayşe'nin elinde siyah ve beyaz fayanslar var. Ayşe bu fayansları yukarıda görüldüğü gibi kare oluşturacak şekilde diziyo. Buna göre 3x3'lük dizilişte 4 siyah, 5 beyaz; 4x4'lük dizilişte 8 siyah, 8 beyaz fayans; 5x5'lik dizilişte 12 siyah, 13 beyaz fayans bulunmaktadır.

Aşağıdaki tablo Ayşe'nin yaptığı fayans dizilişlerini ve sayılarını göstermektedir. Buna göre Ayşe'nin yapacağı 5x5 ve 6x6'lık dizilişlerde tablodaki boşlukları doldurunuz?

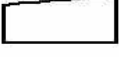
Diziliş	Beyaz fayans sayısı	Siyah fayans sayısı	Toplam fayans sayısı
3x3	5	4	9
4x4	8	8	16
5x5			
6x6			

Verilen tabloya göre aşağıdaki soruları cevaplayınız?

1. Ayşe 10x10'luk bir dizilişte kaç tane beyaz ve siyah fayans kullanmış olmalı? Nasıl bulduğunuzu açıklayınız...
2. Ayşe toplamda 81 fayans kullanmışsa kaç siyah ve kaç beyaz fayans kullanmıştır? Nasıl bulduğunuzu açıklayınız...
3. Ayşe oluşturduğu bir şekilde 56 siyah fayans kullanmıştır. Bu şekil kaçıncı şekildir, yani hangi dizilişe aittir? Bu dizilişte kaç tane beyaz fayans kullanmıştır? Nasıl bulduğunuzu açıklayınız...
4. Ayşe $n \times n$ 'lik bir dizilişte kaç tane beyaz ve siyah fayans kullanır? Nasıl bulduğunuzu açıklayınız...

GÖREV 9: Çokgenlerin İç Açıları Toplamını Bulabilir misiniz?

1. Tablodaki boş yerleri tamamlayınız?

Çokgen	Kenar Sayısı	Köşegen Sayısı	Üçgen sayısı	İç açılar toplamı
	3	0	1	$1 \times 180^\circ$
				
				
				

2. Tabloyu göz önüne alarak 10 kenarlı bir çokgenin iç açılar toplamı hakkında ne söylersiniz?

3. n kenarlı bir çokgenin iç açılar toplamı hakkında bir kural bulmayı deneyiniz?

4. n kenarlı bir çokgenin bir köşesinden çizilen köşegen sayısı kaçtır?

GÖREV 10: Sayı Tablosundaki Örüntüyü Bulabilir Misiniz?

1	2	3	4
5			8
9	10	11	12
13			
			20
21			24
25	26	27	28

1. Yukarıdaki tabloda boş yerleri doldurunuz?
2. Tabloya göre hangi sayılar köşegen sayıları oluşturur?
3. Köşegen örüntüleri oluşturan sayılara dair bir kural bulabilir misiniz?
4. Hangi sayılar sütun örüntüleri oluşturur?
5. Sütun örüntülerini oluşturan sayılara dair bir kural bulabilir misiniz?
6. 15. Satır ve 3. Sütundaki sayı kaçtır?

GÖREV 11: Sayı Tablosundaki Örüntüyü Bulabilir Misiniz?

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35
36	37	38	39	40

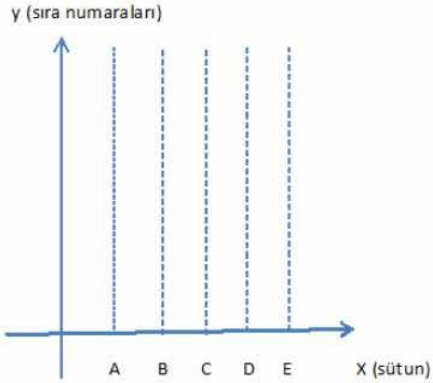
1. Yukarıdaki tabloya göre hangi sayılar köşegen sayıları oluştururlar?
2. Köşegen örüntüleri oluşturan sayılara dair bir kural bulabilir misiniz?
3. Hangi sayılar satır örüntüleri oluştururlar?
4. Herhangi bir satıra ait herhangi bir sayıyı bulmak için bir kural bulabilir misiniz?
5. 32. satır ve 2. sütundaki sayı kaçtır?

GÖREV 12: Koltuğunuz Hangisi?

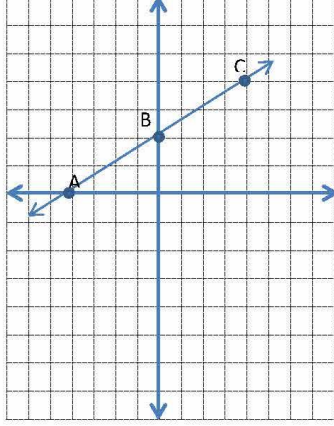
A	B	C	D	E
1	2	3		
		4	5	6
7	8	9		
		10	11	12
13	14	15		

Hafta sonu sınıftaki arkadaşlarınızla bir animasyon filmi izlemeye gidiyorsunuz. Sinema salonunun planı yukarıda görüldüğü gibidir. Bilet almakta biraz geç kaldığınız için ancak arka sıralarda yer bulabildiniz. Siz 48. koltukta, Ahmet 43. koltukta, Dilara 50. koltukta, Enes 52. koltukta oturuyorsunuz. Buna göre;

1. Her birinizin kaçınıcı sırada oturduğunuzu bulunuz?
2. Her birinizin kaçınıcı sütunda (A, B, C, ... ile belirtilen yerler) oturduğunuzu bulunuz?
3. Sizin, Ahmet'in, Dilara'nın, Enes'in oturacağı koltukları çiziniz ve birbirinize göre nerede oturduğunuzu belirleyiniz?
4. Aşağıda görülen grafiğe x eksenı sütunları (A, B, C, D, E), y eksenı de sıra numaralarını göstermek üzere her birinizin oturduğı koltuğı nokta şeklinde gösterebilir misiniz?



GÖREV 13: Doğruların Eğimlerini Bulabilir Misiniz?



Yandaki grafiğe göre;

A noktasından B noktasına gitmek için ... birim sağa, ... yukarı çıkmak gerekir.

O halde,

$$\text{eğim} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

B noktasından C noktasına gitmek için ... birim sağa, ... yukarı çıkmak gerekir.

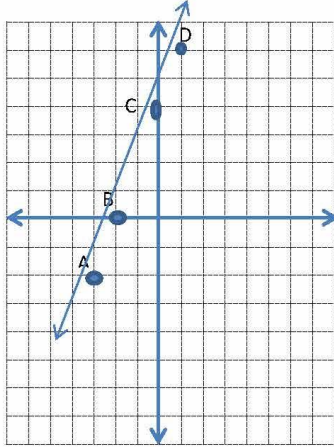
O halde,

$$\text{eğim} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

A noktasından C noktasına gitmek için ... birim sağa, ... yukarı çıkmak gerekir.

$$\text{O halde, eğim} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

Bu üç eğim arasında bir ilişki fark ettiniz mi? Cevabınızı açıklayınız...



Yandaki grafiğe göre;

A noktasından B noktasına gitmek için ... birim sağa, ... yukarı çıkmak gerekir.

O halde,

$$\text{eğim} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

B noktasından C noktasına gitmek için ... birim sağa, ... yukarı çıkmak gerekir.

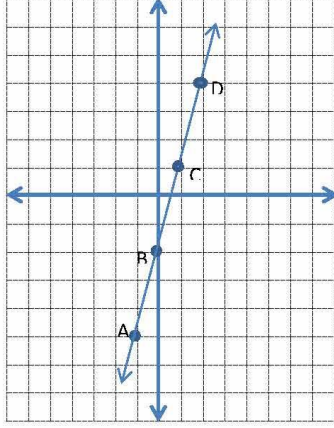
O halde,

$$\text{eğim} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

C noktasından D noktasına gitmek için ... birim sağa, ... yukarı çıkmak gerekir.

A noktasından D noktasına gitmek için ... birim sağa, ... yukarı çıkmak gerekir.

$$\text{O halde, eğim} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$



Yandaki grafiğe göre;

A noktasından B noktasına gitmek için ... birim sağa, ... yukarı çıkmak gerekir.

O halde,

$$\text{eğim} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

B noktasından C noktasına gitmek için ... birim sağa, ... yukarı çıkmak gerekir.

O halde,

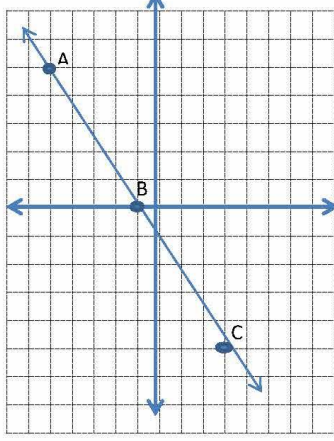
$$\text{eğim} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

C noktasından D noktasına gitmek için ... birim sağa, ... yukarı çıkmak gerekir.

A noktasından D noktasına gitmek için ... birim sağa, ... yukarı çıkmak gerekir.

$$\text{O halde, eğim} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

GÖREV 14: Doğruların Eğimlerini Bulabilir Misiniz?



Yandaki grafiğe göre;

B noktasından A noktasına gitmek için ... birim sola, ... yukarı çıkmak gerekir.

O halde, eğim = $\frac{\square}{\square}$

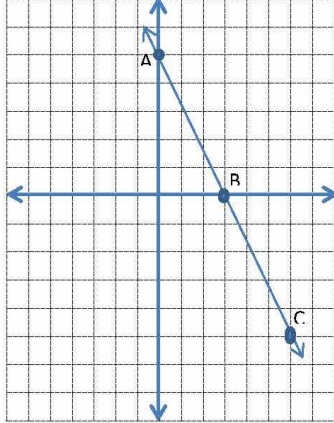
C noktasından B noktasına gitmek için ... birim sola, ... yukarı çıkmak gerekir.

O halde, eğim = $\frac{\square}{\square}$

C noktasından A noktasına gitmek için ... birim sola, ...

yukarı çıkmak gerekir.

O halde, eğim = $\frac{\square}{\square}$



Yandaki grafiğe göre;

B noktasından A noktasına gitmek için ... birim sola, ... yukarı çıkmak gerekir.

O halde, eğim = $\frac{\square}{\square}$

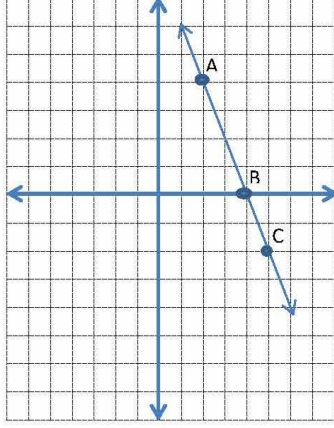
C noktasından B noktasına gitmek için ... birim sola, ... yukarı çıkmak gerekir.

O halde, eğim = $\frac{\square}{\square}$

C noktasından A noktasına gitmek için ... birim sola, ...

yukarı çıkmak gerekir.

O halde, eğim = $\frac{\square}{\square}$



Yandaki grafiğe göre;

B noktasından A noktasına gitmek için ... birim sola, ... yukarı çıkmak gerekir.

O halde, eğim = $\frac{\square}{\square}$

C noktasından B noktasına gitmek için ... birim sola, ... yukarı çıkmak gerekir.

O halde, eğim = $\frac{\square}{\square}$

C noktasından A noktasına gitmek için ... birim sola, ...

yukarı çıkmak gerekir.

O halde, eğim = $\frac{\square}{\square}$

GÖREV 15: Şekillerin Sayıları İle Çevre Uzunlukları Arasındaki İlişkiyi Gösterir Misiniz?

1. Bir kenarı 1 br olan yandaki üçgene göre üçgen sayısı ve üçgenin çevresinin uzunluğu arasındaki ilişkiyi aşağıdaki tabloda gösteriniz...

üçgen sayısı	Çevre uzunluğu
1	
2	
3	
...	
n	



2. Bir kenarı 1 br olan yandaki kareye göre kare sayısı ve karenin çevresinin uzunluğu arasındaki ilişkiyi aşağıdaki tabloda gösteriniz...

kare sayısı	Çevre uzunluğu
1	
2	
3	
...	
n	

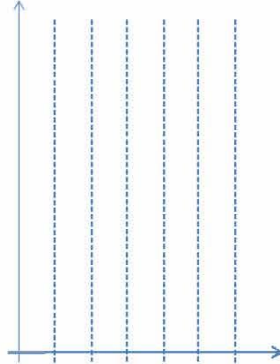


3. Bir kenarı 1 br olan yandaki beşgene göre beşgen sayısı ve beşgenin çevresinin uzunluğu arasındaki ilişkiyi aşağıdaki tabloda gösteriniz...

beşgen sayısı	Çevre uzunluğu
1	
2	
3	
...	
n	



4. Şekil sayısına göre üçgenin, karenin, beşgenin çevre uzunluklarını aynı grafik üzerinde göstermeyi deneyiniz... (ipucu: bağımsız değişken olan şekil sayısını x ekseninde, bağımlı değişken olan çevre uzunluğunu da y eksenine yerleştiriniz).



GÖREV 16: Dikdörtgenin Kenar Uzunluklarını Bulabilir Misiniz?

1. Çevresinin uzunluğu 18 cm olan bir dikdörtgenin kısa kenarına ve uzun kenarına ait uzunluklar kaç cm olabilir? Lütfen bu dikdörtgenlerin şekillerini çizerek kenar uzunluklarını şekillerin üzerinde gösteriniz...
2. Bu dikdörtgenin kısa kenarının ve uzun kenarının uzunluklarının alabileceği değerleri grafik üzerinde gösterebilir misiniz?
3. Belirttiğiniz bu noktaları birbirine bağlayıp bir doğru elde edebilir miyiz? Cevabınızı açıklayınız...

GÖREV 17: Kaç Muma İhtiyacınız Var?

Şehrinizdeki elektrik idaresi yarın saat 09:00'da 40 dakika sürecek bir elektrik kesintisi olacağını duyurdu. Elinizde özdeş 3 mum var ve bu mumların herhangi biri yakıldığında dakikaya göre boyunun kaç cm olacağı aşağıdaki tabloda verilmiştir.



Zaman (dk)	Boy (cm)
0	20
1	18
2	16
3	14
3,5	13
4,5	11
6	8

Buna göre;

1. Tabloda hangi örüntüleri fark ettiniz? Örneğin; mumun yandığı süre ile mumun boyu arasında nasıl bir ilişki vardır, mumun yakılmadan önceki boyu gibi...
2. Sizce mum, zaman aralıkları dikkate alındığında eşit miktarda mı kısalmaktadır? Nasıl bulduğunuzu açıklayınız...
3. Bir mum yandığında kaç dakika sonra tükenir? Elinizde aynı mumlardan 3 tane olduğunu göz önüne aldığımızda 40 dakika sürecek elektrik kesintisi boyunca mum ışığından faydalanmanız için bir yol bulunuz...
4. Mumun boyunun zamana göre değişim grafiğini çizmeyi deneyiniz? Grafiğinizin bağımlı ve bağımsız değişkenlerini belirterek grafiğinize isim veriniz.

5. Boyu 30 cm olan ve yakıldığında yukarıdaki mumla eşit zaman aralıklarında eşit miktarda kısalan mumun zamana göre boyunu tablo şeklinde gösterir misiniz? Nasıl bulduğunuzu açıklayınız...

6. Boyu 30 cm olan ve yakıldığında eşit zaman aralıklarında yukarıdaki mumun iki katı kadar kısalan mumun zamana göre boyunu tablo şeklinde gösterir misiniz? Nasıl bulduğunuzu açıklayınız...

7. Diyelim ki 4. soruda elektrik kesintisi boyunca mum ışığından yararlanmak için mum almaya karar verdiniz. Alacağınız mumun yakıldığında zamana göre boyunun değişimi yandaki tabloda verilmiştir. O halde;

Zaman (dk)	Boy (cm)
0	24
1,5	21
3	18
4	16
4,5	15

a. Sizce mum, zaman aralıkları dikkate alındığında (birim zamanda) eşit miktarda mı kısalmaktadır? Nasıl bulduğunuzu açıklayınız...

b. Yeni alacağınız mum kaç dakika sonra tükenir, açıklayınız?

c. Yeni alacağınız mum ile elinizde olan mumların eşit zaman aralıklarında (birim zamanda) boylarının kısalma miktarı aynı mıdır? Açıklayınız...

GÖREV 18: Birim Zamanda Alınana Yol Artmış Mı, Azalmış Mı?

Feyza okula giderken eve olan uzaklığının zamana göre değişimi tabloda verilmektedir. Buna göre;

1. Feyza'nın birim zamana göre aldığı yol sabit mi, artıyor mu, azalıyor mu? Cevabınızı açıklayınız...

Zaman (sn)	Uzaklık (m)
0	2
30	20.75
10	8.25
4	4.5
24	17

2. Feyza'nın hızı sabit mi, artmış mı, azalmış mı? Cevabınızı açıklayınız...

3. Diyelim ki Feyza 10 saniyede 16 metre yol alıyor olsun. Feyza ile eşit zaman aralıklarında eşit yol alan Melike saniyede metre yol alıyor olabilir. Boşluklara neden o sayıları yazdığınızı açıklayınız? Melike'nin bazı saniyelerde almış olabileceği yol miktarı ile ilgili 3 durum oluşturunuz.

GÖREV 19: Curiosity, Dünya'dan fırlatıldı...

Resimde NASA tarafından üretilmiş en zeki gezegenler arası gezginci robot olan Curiosity'nin, Mars gezegenine indiğinde çekilen fotoğrafını görüyoruz. Curiosity (Merak) dünyadan fırlatıldığı anda dünyaya olan uzaklığının zamana göre değişimi aşağıdaki tabloda verilmektedir.



Zaman (sn)	Uzaklık (km)
3,75	30
7,5	60
12	96
15	120
40	320
60	500
70	600

1. Tabloya göre Merak'ın hızı sabit mi, artmış mı, azalmış mı? Cevabınızı açıklayınız...
2. Tabloda verilen bilgileri grafikte gösterecek olsanız, grafiğiniz neye benzer? Grafiğinizin kabataslak görüntüsünü lütfen çiziniz...
3. Tabloda verilen bilgileri grafikte göstermeyi deneyiniz...

GÖREV 20: Merak, Mars'a İnmek Üzere...

Merak'm 15. saniyeden itibaren Mars'a olan uzaklığının saniyelere göre değişimi tabloda verilmiştir. Buna göre;

Zaman (sn)	Uzaklık (km)
0	350
2	300
4	250
5	200
7	125
9	75
13	20
14	10
15	0

1. Tabloya göre Merak'ın hızı sabit mi, artmış mı, azalmış mı? Cevabınızı açıklayınız...
2. Tabloda verilen bilgileri grafikte gösterecek olsanız, grafiğiniz neye benzer? Grafiğinizin kabataslak görüntüsünü lütfen çiziniz...
3. Merak'm saniyelere göre Mars'a olan uzaklık tablosuna göre yaptığı yolculuğun hikâyesini yazınız...

GÖREV 21: $y=x$ doğrusal denkleminde x değişkenine değerler vererek y değişkeninin aldığı değerleri bulunuz ve aşağıdaki tabloya yazınız.

y	x
0	
1	
2	
3	
4	
5	

$y=2x$ doğrusal denkleminde x değişkenine değerler vererek y değişkeninin aldığı değerleri bulunuz ve aşağıdaki tabloya yazınız.

y	x
0	
1	
2	
3	
4	
5	

$y=3x$ doğrusal denkleminde x değişkenine değerler vererek y değişkeninin aldığı değerleri bulunuz ve aşağıdaki tabloya yazınız.

y	x
0	
1	
2	
3	
4	
5	

Şimdi bu üç denklemi de aynı grafik üzerine çiziniz. Doğrular nasıl farklılaşmaktadır?

$x=1$ noktasında her üç doğruya karşılık gelen y değerlerini yazınız. Bu değerler ile denklemlerdeki değerler arasında bir ilişki var mıdır?

GÖREV 22: $y=x+3$ denklemine göre verilen x değerlerine göre y 'nin alacağı değerleri bulunuz.

y	x
	0
	1
	2
	3
	4
	5

$y=x+4$ denklemine göre verilen x değerlerine göre y 'nin alacağı değerleri bulunuz.

y	x
	0
	1
	2
	3
	4
	5

$y=x+5$ denklemine göre verilen x değerlerine göre y 'nin alacağı değerleri bulunuz.

y	x
	0
	1
	2
	3
	4
	5

Her üç doğruyu da aynı grafik üzerine çiziniz.

Bu grafiğe göre doğruların aynı ya da farklı özellikleri hakkında ne söyleyebilirsiniz?

GÖREV 23: $3x+2y-12=0$ doğrusunun grafiğini çiziniz. Bu doğru üzerinde olan 2 noktayı belirtiniz.

Görev: $y=6$ doğrusunun grafiğini çiziniz. Bu doğru hangi x değerlerini sağlar?

Görev : $x=8$ doğrusunun grafiğini çiziniz. Bu doğru hangi y değerlerini sağlar?

Görev: Orijinden geçen bir doğru denklemi yazınız ve grafiğini çiziniz.

Görev : y eksenini 3 noktasında kesen dilediğiniz bir doğrunun denklemini yazınız ve grafiğini çiziniz.

Görev: $(a,5)$ noktası $y+8x+30=0$ doğrusu üzerindeyse a değeri nedir?

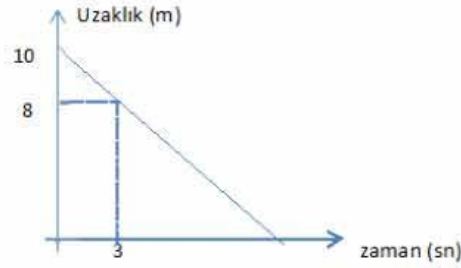
Görev: $4x+6y-24=0$ doğrusu ve $3x+2y+12=0$ doğrusu hangi noktalarda kesişir?

GÖREV 24: Kim Daha Hızlı Yürüyor?

Selin ve Burak kimin daha hızlı yürüdüğüne dair bir iddiaya giriyorlar ve sizden okulunuzun basketbol sahasına olan uzaklıklarını saniyelere göre kaydetmenizi istiyorlar. Siz istenen bilgileri kaydediyorsunuz ve buna dair bir tablo ve bir grafik oluşturunuz.



Zaman (sn)	Uzaklık (m)
2	0,75
4	1,5
6	2,25
9	3,375



Burak'ın uzaklık- zaman tablosu

Selin'in uzaklık-zaman grafiği

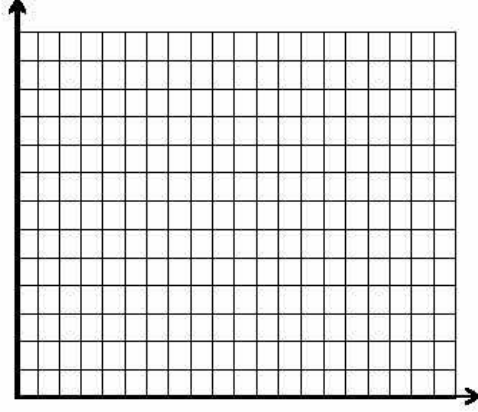
1. Tabloda fark ettiğiniz hangi örüntüler oldu?
2. Grafikte fark ettiğiniz hangi örüntüler oldu? Doğrunun y eksenini kestiği nokta ne anlama gelmektedir? Doğrunun eğimi pozitif midir negatif midir? Bu size hangi bilgiyi veriyor?
3. Sizce Burak mı daha hızlı yürüyor, Selin mi? Cevabınızı açıklayınız...
4. Burak'ın ve Selin'in uzaklık ve zaman bilgilerine ait denklemleri oluşturabilir misiniz?
5. Farz edelim ki siz Burak'tan hızlı, Selin'den yavaş yürüdüğünüzü iddia ediyorsunuz. Buna göre kendi uzaklık ve zaman arasındaki ilişkiyi gösteren denkleminiz nasıl olur? Cevabınızı açıklayınız...

GÖREV 25: Hangi Arabayı Alacaksınız?

Yeni bir araba almak istiyorsunuz. Bunun için arabayı test etmeye karar verdiniz. İki farklı deneme yaptınız ve herhangi bir başlama noktasına uzaklığınızı ölçtünüz. Her iki deneme sonucuna ilişkin verileriniz şu şekilde;

Zaman(sn)	2	2	3	3	5	5	8	8	9	10	12	13
Uzaklık (km)	4	5	6	7	10	9	12	14	15	20	25	25

1. Verilerinizi aşağıdaki grafikte gösteriniz. Bunun için öncelikle eksenleri ve grafiğinizi adlandırınız.



2. Görüldüğü gibi uzaklık ve zaman arasında bir ilişki var. Bu ilişkiyi göstermek için öyle bir doğru çizin ki doğru ya noktaların üzerinden geçsin ya da tüm noktalara yakın noktalardan geçsin. Çizdiğiniz bu doğru 'uyum doğrusudur'.
3. Farz edelim ki arkadaşınız daha hızlı olduğu için B marka arabayı almanız gerektiğini söylüyor. Arabanın teste başlangıç noktasından 5 km gerisinde başladığını düşünürsek arabanın test sonuçlarına ilişkin denklemler ne olabilir? Cevabınızı açıklayınız?

GÖREV 26: Hangi Firmayı tercih edersiniz?

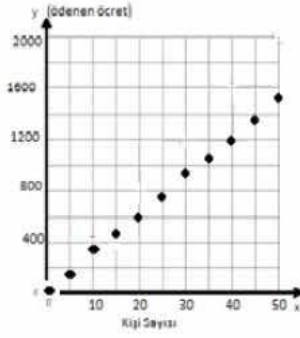
Arkadaşlarınızla hafta sonu Divriği Ulu Cami'ye bir gezi planlıyorsunuz. Bunun için iki otobüs firmasıyla görüştünüz. Firmalar geziye katılan kişi sayısına bağlı olarak istedikleri ücreti size şu şekilde sundular;



A Firması

Kişi sayısı	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
Toplam ücret	400	535	655	770	875	975	1070	1140	1180	1200

B Firması



1. Tablo ve grafikte hangi örüntüleri buldunuz?

2. Hangi firmayı tercih edersiniz? Cevabınızı açıklayınız...

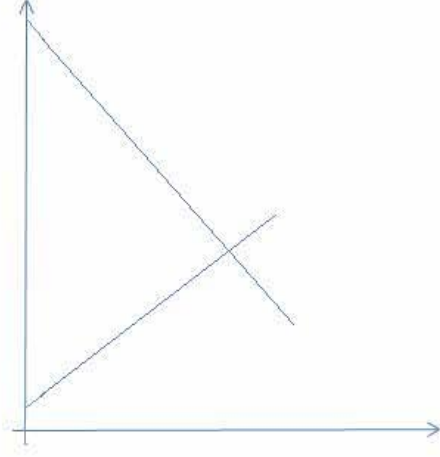
3. Bulduğunuz örüntülere göre tablo ve grafikte gösterilmeyen noktaları nasıl tahmin ettiniz?

4. B firmasının grafiğinde görülen noktaları birleştirmek anlamlı olur mu? Cevabınızı açıklayınız...

5. Tura 38 kişi gidecek olsanız, her bir firma sizden ne kadar isterdi? Nasıl buldunuz?

6. A ve B firmalarının kişi sayısına göre talep ettikleri ücretleri bulmak için bir yöntem geliştiniz.

GÖREV 27: Grafiğin problemi nedir?



Cevabı, yukarıda gördüğünüz grafik ile gösterebileceğiniz bir soru oluşturunuz?

Oluşturduğunuz bu soruyu çözünüz?

GÖREV 28: Hangi Mağazadan DVD Kiralayacaksınız?

DVD kiralamak için üç mağazayla görüşüyorsunuz ve her mağaza size farklı ücret tarifeleri öneriyor. A mağazası depozito olarak 5 lira ve her DVD için 6 lira ücret talep ediyor. B mağazası depozito olarak 14 lira ve her DVD için 3 lira ücret talep ediyor. C mağazası ise depozito istemeden her DVD için 5 lira ücret talep ediyor. Buna göre;



1. Her bir mağazanın talep ettiği fiyat ve DVD sayısını gösteren denklemleri oluşturunuz.
2. Hangi mağazadan alışveriş etmeyi tercih edersiniz? Cevabınızı açıklayınız.
3. Bu denklemlerin doğrusunu çizseniz, bu doğrular kesişir mi?

GÖREV 29: Bakterilerin Bölünmesi

Fen bilgisi dersinde bakterilerin bölünmesi ile ilgili bir deney yapıyorsunuz. Bunun için de 'Bacillus' adlı bakteriyi izliyorsunuz ve gözlem sonuçlarını not ediyorsunuz. Yaptığınız gözlem sonucuna göre başlangıçta bir bakteri ile başladığınız deneyde, bakterinin her dakika iki katına çıktığı sonucuna vardınız. Buna göre;

1. İlk 5 dakikada bakteri sayısına ait tabloyu oluşturunuz.

Zaman	Bakteri sayısı
1	
2	
3	
4	
5	

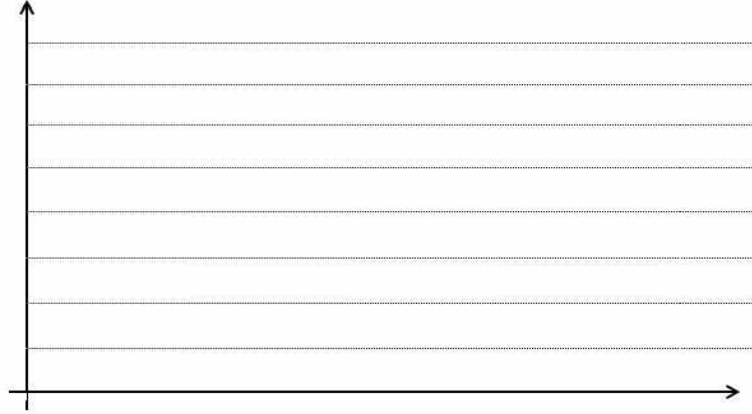
2. 100. dakikada kaç bakteri elde ettiniz?
3. Herhangi bir zamanda bakterinin sayısını verecek bir formül elde edebilir misiniz?
4. Bakteri sayısının zamanla değişimini grafik üzerinde gösterebilir misiniz?
5. Bu bakteri dakikada üç katına çıksaydı bulduğunuz kural nasıl farklılaşır? Nasıl bulduğunuzu açıklayınız?

GÖREV 30: Türkiye'nin Nüfus Değişimi

Türkiye'nin nüfusunun yıllara göre değişimini yandaki tabloda görmekteyiz. Tabloya göre nüfusta meydana gelen değişim ne yöndedir?

Yıllara göre nüfusta meydana gelen değişimi aşağıdaki grafik üzerinde gösteriniz.

YIL	NÜFUS
1960	46 milyon
1965	42 milyon
1970	45 milyon
1980	52 milyon
1990	54 milyon
2000	67 milyon
2007	70 milyon
2008	71 milyon
2009	72 milyon
2010	75 milyon
2011	79 milyon
2012	83 milyon
2013	87 milyon



GÖREV 31: Hangi Yarışmacı Takımda Oynasın?

Okulunuzun basketbol takımı için seçmeler başladı. Kaptan 10 kişiyi seçti ancak son kişiye bir türlü karar veremiyor. Çünkü Naz ve Nilay arasından bir seçim yapması gerekiyor. Kaptan en sonunda bir yarışma düzenlemeye ve bitiş çizgisine ilk önce geleni takıma almaya karar verdi. Nilay'ın zamana göre başlangıç noktasına uzaklığını veren denklem $y=5x+7$ dir. Naz'ın zamana göre başlangıç noktasına uzaklığı ise yandaki tabloda veriliyor.

zaman (dakika)	uzaklık (metre)
3	18
5	30
7	42
9	50
11	58

1. Her iki yarışmacının zamana göre başlangıç noktasına uzaklığını gösteren doğruları çiziniz. Bağımlı ve bağımsız değişkenleri belirterek eksenleri ve grafiğinizi adlandırınız. Çizdiğiniz doğruları göz önüne alarak hangi yarışmacının seçileceğine dair ne düşünürsünüz? Açıklayınız.

1. Naz ve Nilay kaçınıcı dakikada başlangıç noktasından eşit uzaklıktadır?
2. Sizce kaptan hangi oyuncuyu seçmeli? Buna nasıl karar verdiniz?
3. Bu grafiğe göre Naz kaçınıcı dakikada başlama çizgisinden 96 metre uzakta olur?
4. 10. dakikada yarışmacılar arasında kaç metre fark olur?

GÖREV 32: EN HIZLI KİM?

Bir bisiklet yarışında 2 bisikletlinin başlangıç çizgisine uzaklıkları aşağıdaki tablolarda verilmiştir.

Burak	
Zaman (saniye)	Uzaklık (metre)
0	2
2	5
4	8
6	11
8	14

Selin	
Zaman (saniye)	Uzaklık (metre)
0	2
3	8
5	12
7	16



1. Tablolardaki bilgilere bakarak Burak ve Selin'in zamana göre başlangıç çizgisine uzaklıklarını aynı grafik üzerinde gösteriniz.
2. Doğruların y eksenini kestiği nokta ne ifade etmektedir? Bu nokta denklemde nasıl görülmektedir?
3. Bu doğrular kesişirler mi? Cevabınızı açıklayınız...
4. Her bir bisikletliye ait uzaklık-zaman ilişkisini veren denklemi yazınız? Nasıl yazdığınızı açıklayınız.
5. 150 metrelik parkuru hangi yarışmacı önde tamamlar? Bunun için kaç saniye geçmesi gerekir?
6. Diyelim ki başka bir yarışmacı olan Fatma'nın uzaklığını zamana göre ifade eden denklem $y=3x$ şeklinde olsaydı, Fatma'nın da dâhil olduğu yarışta kazanan değişir miydi?

GÖREV 33: Kaç Dilim Börek?

Kendi masraflarınızı çıkarmak için yaz tatilinde çalışmaya karar verdiniz. Bunun için bir büfe kiraladınız ve annenizin yaptığı böreklerden satmaya başladınız. Büfenin günlük kirası 15 lira ve her börek dilimi de 75 kuruştur. Ayrıca her bir börek diliminin maliyeti de 10 kuruştur. Bu durumda;

1. Sinem, Didem, Ela ve Ali elde edilen kar ve satılan börek sayısını gösteren denklemlerini şu şekilde oluşturdular;

Sinem'in denklemi: $y=15+75x$

Didem'in denklemi: $y=15-0.75x$

Ela'nın denklemi: $y=(15-0.10)-0.75x$

Eda'nın denklemi: $y=75x-15-10x$

Her bir denklemin doğru ya da yanlış olduğunu irdeleyiniz. Neden doğru ve neden yanlış olduklarını belirtiniz. Size göre kimin cevabı doğru?

2. Kara geçebilmek için en az kaç börek satmalısınız? Cevabınızı açıklayınız...

3. "124 dilim börek sattığınızda ne kadar kar edersiniz?" sorusuna Sinem ve Ela şu cevapları veriyorlar;

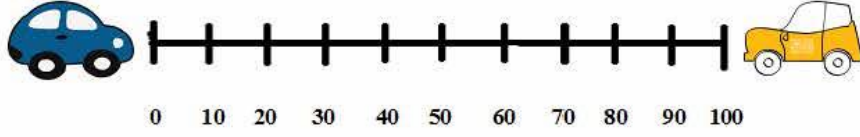
Sinem'in cevabı: $y=75 \times 124 - 10 \times 124 - 15 = 55 \times 124 - 15 = 6805$

Ela'nın cevabı: $y=15 - 0.75 \times 124 - 0.10 \times 124 = 15 - 93 - 12.4 = -90.4$

Sinem ve Ela nerede yanlışlık yaptıklarını göremiyorlar ve size soruyorlar. Siz onlara cevaplarının yanlış olduğunu nasıl anlatırsınız?

4. Bu denkleme ait börek sayısı-kar grafiğini çizer misiniz?

GÖREV 34: Çarpışan Arabalar

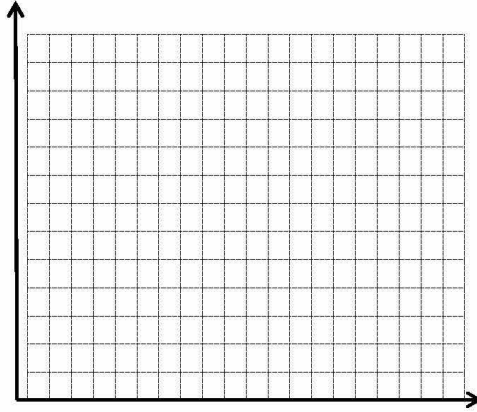


1. Mavi arabanın saniyede 2,7 birim gittiğini farz edelim. 0 noktasından sağ tarafa doğru hareket eden mavi araba 10 saniye sonra nerede olur? Cevabınızı açıklayınız...
2. x saniye sonra mavi arabanın nerede olacağına ilişkin denklemi yazınız? Cevabınızı açıklayınız...
3. Sarı arabanın saniyede 2,3 birim gittiğini farz edelim. 100 noktasından sola doğru hareket eden sarı araba 10 saniye sonra nerede olur? Cevabınızı açıklayınız...
4. x saniye sonra sarı arabanın nerede olacağına ilişkin denklemi yazınız? Nasıl yazdığınızı açıklayınız?
5. Birbirlerine doğru hareket eden bu iki araba nerede ve ne zaman çarpışırlar? Cevabınızı açıklayınız...
6. Her iki arabanın zaman uzaklık grafiklerini çizer misiniz?

GÖREV 35: Hangi Tarife?

Ceren'e ailesi fen lisesini kazandığı için hediye olarak cep telefonu alıyor. Telefon faturası için ise her ay 72 lira vereceklerini söylüyorlar. Ceren telefonu için bir tarife belirlemek zorunda. Satıcı Ceren'e iki tarife sunuyor. Birinde her mesaj 3 kuruş ve konuşmanın dakikası 5 kuruş; diğer tarifede ise her mesaj 2 kuruş ve konuşmanın dakikası 6 kuruş. Hangi tarifeyi seçmesi gerektiği konusunda Ceren'e yardım eder misiniz?

1. Her iki tarifeyi ifade eden denklemleri ayrı ayrı yazınız? Bunun için mesaj ücretini x ile konuşma süresini y ile gösteriniz.
2. Daha çok mesajlaşmak için Ceren hangi tarifeyi seçmeli? Cevabınızı açıklayınız.
3. Daha çok konuşmak için Ceren hangi tarifeyi seçmeli? Cevabınızı açıklayınız.
4. Farzedelim ki Ceren ayda 100 mesaj gönderiyor. O zaman birinci ve ikinci tarifeye göre en fazla kaç dakika konuşabilecektir?
5. Her iki tarifenin denklemini aşağıdaki koordinat sisteminde çiziniz. Bağımlı ve bağımsız değişkenlerinizi belirleyerek her bir eksen ve grafiğinizi adlandırınız.



6. Doğrular hangi noktada kesişiyorlar? Bu nokta ne ifade etmektedir?
7. Siz olsanız hangi tarifeyi seçerdiniz? Neden?

GÖREV 36: Havuz Kaç Saatte Boşalır?

Bir havuzun hacmi 750 litredir. Bir motor bu havuzu saatte 20 litre su çekerek boşaltmaktadır. Buna göre;

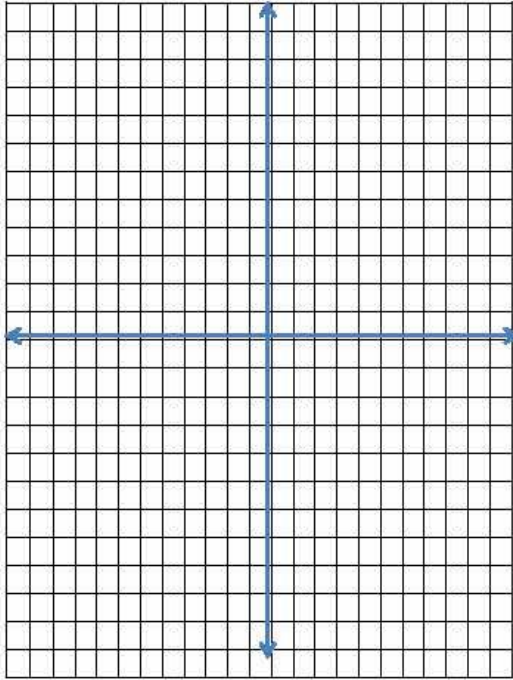
1. Havuzdaki su miktarı ile motorun çalıştığı saat arasındaki ilişkiyi veren denklemi yazınız.
2. Beş saat sonunda havuzda kaç litre su bulunmaktadır?
3. Havuzda 250 litre su kaldığında motor kaç saat çalışmıştır?
4. Motor kaç saatin sonunda havuzu tamamen boşaltır?
5. Motor çalışmaya başladığı andan itibaren zaman-kalan su hacmine ait grafiği çizer misiniz?
6. Bir başka motor saatte 50 litre su çekiyor ancak 5 saat sonunda ertesi güne kadar çalışmıyor. Bu durumda hangi motor havuzu en kısa zamanda boşaltır?

GÖREV 37: Kim Daha İyi Yüzüyor?

Bir bilgisayar oyunu geliştiriyorsunuz. Oyun havuzda yüzme yarışı yapan iki arkadaştan hangisinin yarışı kazanacağı üzerine. Buna göre iki arkadaşın başlangıçtaki ve bir saniye sonraki konumları aşağıdaki gibidir.

	Birinci arkadaş	İkinci arkadaş
Başlangıç	$(-6,-6)$	$(-3,12)$
1 sn sonra	$(-3,-3)$	$(-1,10)$

1. Bu çocukların başlangıçta ve 1 saniye sonra nerede olduklarını aşağıdaki koordinat sisteminde gösteriniz.



2. Çocukların doğrultuları ve hızları değişmediğine göre 2. saniyede nerede olacaklarını bulunuz. Cevabınızı açıklayınız...
3. İkinci çocuk kaç saniye sonra $(9,0)$ noktasında olur?
4. Bu iki çocuk kaç saniye sonra aynı noktada olurlar?

Ek-2. İşlemsel Cebir Testi

Adı-Soyadı:

Numarası:

Sınıfı:

MATEMATİK SORULARI

1. Aşağıda verilen örüntünün bir sonraki adımını çizin?



1. adım

2. adım

3. adım

4. adım

- Bu örüntünün genel kuralını bulunuz? Cevabınızı açıklayınız.

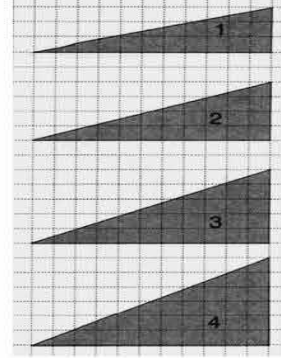
- 2.

x	y	Yandaki tabloya göre x ve y arasındaki ilişkiyi gösteren genel bir kural yazabilir misiniz? Cevabınızı açıklayınız.
1	4	
2	5	
3	6	
4	7	

3. Bir kumbarada 1 liralık ve 2 liralık paralardan toplam 30 tane vardır. Kumbaradaki toplam para 50 lira olduğuna göre, kaç adet 2 liralık para vardır?

4. $\frac{3x+2}{2} - \frac{4x-3}{3} = \frac{1}{3} - x$ denkleminde x nedir?

5. Arabanızla yandaki şekilde görülen rampaları çıkacağınızı farzedin. Kaç numaralı rampayı en zor çıkarsınız? Cevabınızı açıklayınız...



Hangi rampayı en kolay çıkarsınız? Cevabınızı açıklayınız...

6. Evinizin duvarlarını duvar kâğıdı ile kaplamaya karar verdiniz. Duvar kâğıtlarının fiyatlarını araştırdınız ve bir top düz duvar kâğıdının 3 lira, bir top çiçekli duvar kâğıdının da 7 lira olduğunu öğrendiniz. Eviniz için 20 top düz duvar kâğıdı, 45 top çiçekli duvar kâğıdı gerekmektedir. Ayrıca duvar kâğıtlarını yapıştırmak için de 1 torba yapıştırıcıya ihtiyacınız var. 1 torba yapıştırıcının fiyatı ise 15 liradır. Bu durumda evinizin duvarlarını kâğıtla kaplamanız için ne kadar ödemeniz gerekmektedir? Nasıl yaptığınızı açıklayınız.

Bu soru karşısında arkadaşlarının verdikleri cevaplar şöyle;

Elif'in cevabı: $(3 + 7) \times (20 + 45) + 15$

Ali'nin cevabı: $(3 \times 20) + (7 \times 45) + 15$

Leyla'nın cevabı: $15 + 3 \times 20 + 7 \times 45$

a. Elif'in cevabı doğru mu, yanlış mı? Cevabınızı açıklayınız.

b. Ali'nin cevabı doğru mu, yanlış mı? Cevabınızı açıklayınız.

c. Leyla'nın cevabı doğru mu, yanlış mı? Cevabınızı açıklayınız.

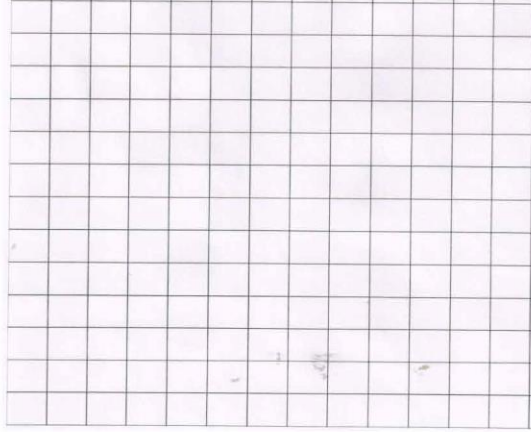
d. Leyla işlemini şu şekilde devam ettirmektedir;

$$15 + 3 \times 20 + 7 \times 45 = 18 \times 20 + 7 \times 45 = 360 + 315 = 675$$

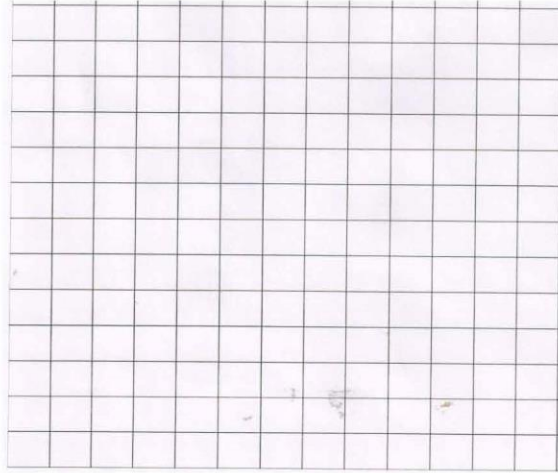
Leyla'nın işlemi doğru mudur, yanlış mı? Cevabınızı açıklayınız.

x	0	1	2	3	4	5	7.
y	1	3	5	7	9	11	

i) Aşağıda verilen gride bir koordinat sistemi çiziniz. Tabloda verilen noktaları x eksenine ve y eksenine üzerinde ayrı ayrı gösteriniz. Daha sonra (x,y) ikililerini koordinat sisteminde işaretleyiniz.



8. $2x+3y=18$ denkleminin grafiğini çizin. Eğer $(a,3)$ noktası bu doğrunun üzerindeyse a kaçtır? Cevabınızı açıklayınız.



Ek-3. Kavramsal Cebir Testi

Adı-Soyadı:

Numarası ve Sınıfı:

MATEMATİK TESTİ II

1. Kuralı $7n+3$ olan bir örüntünün ilk 5 terimi;

2. i) $a+b-8=c$ ise $a+b-c=?$

ii) Bir ifadeyi – parantezine alırken parantez içine aldığınız ifadenin işaretlerini de değiştirmeniz gerekir; $-(a+b)=-a-b$ gibi. Buna göre aşağıdaki ifadeyi – parantezine alınız;

$$7x-3y=-(.....)$$

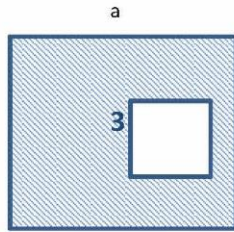
iii) $3m+2n+m=?$

3. i) Sevgi s yaşındadır. Sevgi'nin 3 yıl sonraki yaşı;.....

ii) Sevgi'nin 5 yıl önceki yaşı;.....

iii) Cem Sevgi'den 8 yaş küçükse, Cem'in yaşı;.....

4.



i. Yandaki şekilde büyük karenin bir kenar uzunluğu a br, küçük karenin bir kenar uzunluğu ise 3 br dir. Buna göre taralı bölgenin alanı kaç br^2 dir?

ii) Herhangi bir dikdörtgenin çevresi 12 br ise, kısa ve uzun kenar uzunlukları kaç br olabilir? Kenar uzunluklarına dair mümkün olan iki ihtimali yazar mısınız?

iii) Herhangi bir dikdörtgenin çevresi $24+4x$ br ise, kısa ve uzun kenar uzunlukları kaç br olabilir? Kenar uzunluklarına dair mümkün olan iki ihtimali yazar mısınız?

5. 2 kalem ile bir silgiye 10 lira ödüyorsunuz. Silginin fiyatı 4 lira olduğuna göre kalemin fiyatı nedir? Nasıl buldunuz?

6.



kenar sayısı k olan yandaki şeklin bir kenarı 1 br ise, çevresi;...

7. Evren'in parasının 5 katı, Zeynep'in parasına eşittir. Buna göre Evren ve Zeynep'in paraları toplamı, Evren'in parasının katıdır.

8. i) $L+M+N=L+P+N$ ifadesi ne zaman doğrudur? Her zaman asla bazen.....
Cevabınızı açıklayınız?

ii) Eğer $a=b$ ise $a+c=b+c$ ifadesi doğru mudur? Cevabınızı açıklayınız?

9. Hangisi daha büyüktür; $2n$ mi $n+2$ mi? Cevabınızı açıklayınız?

10. Mete elindeki paranın tamamıyla ya 8 tost ile 15 ayran ya da 5 tost ile 20 ayran alabilmektedir. O halde Mete bütün parasını harcayarak toplam kaç tost alabilir?

11. i) $8 \times 24 = _ \times 48$ ifadesinde boşluğa hangi sayı geleceğini çarpma işlemi yapmadan bulabilir misiniz? Nasıl buldunuz?

ii) $121-65=120- _$ ifadesinde boşluğa hangi sayı geleceğini çıkarma işlemi yapmadan bulabilir misiniz? Nasıl buldunuz?

12. Aşağıdaki sihirli kutuların her biri sizin ona verdiğiniz sayıya, kutunun üzerinde yazan kuralı uyguluyor ve size yeni sayı veriyor. Buna göre verilen sayılara kutuların üzerindeki işlemleri uygulayarak yeni sayıları elde ediniz. Yeni sayıları nasıl elde ettiğinizi de açıklayınız.

i) 3 $\longleftrightarrow$ $\boxed{\times 2}$ $\longrightarrow$

ii) 2 $\longleftrightarrow$ $\boxed{-7}$ $\longrightarrow$

iii) 5 $\longleftrightarrow$ $\boxed{3 \text{ katının } 2 \text{ eksiği}}$ $\longrightarrow$

iv) 1 $\longleftrightarrow$ $\boxed{4 \text{ eksiğinin } 5 \text{ katı}}$ $\longrightarrow$

v) a $\longleftrightarrow$ $\boxed{b \text{ eksiğinin } 3 \text{ katı}}$ $\longrightarrow$

13. i) $a=b+2$ ifadesinde b'nin değeri 2 artarsa, a'nın değerinde nasıl bir değişim olur?

- ii) $f=3g+2$ ifadesinde g'nin değeri 1 artarsa, f'nin değerinde nasıl bir değişim olur?

- iii) $m=n-4$ ifadesinde m değeri 3 azalır, n'nin değerinde nasıl bir değişim olur?

- iv) $3=ax$ ifadesinde a değeri 2 katına çıkarsa, x değerinde nasıl bir değişim olur?

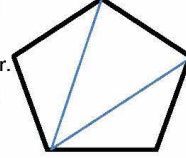
14. Elif arkadaşlarıyla kahve içmeye gitmiştir. Burada bir fincan Türk kahvesi 5 lira, bir fincan saray kahvesi 7 liradır. Elif alışverişi sonrası $5x+7y$ lira ödediğine göre toplamda kaç fincan kahve almış olabilir? Cevabınızı açıklayınız?

15. Aşağıdaki ifadeleri büyükten küçüğe sıralayınız? Cevabınızı açıklayınız?

$a+2$, $a-5$, $a+3$, a , $a-4$ >.....>.....>.....>.....

16. Yandaki gibi bir şekilde köşegen sayısı kenar sayısından 3 çıkarılarak bulunabilir. Örneğin 7 kenarlı bir şeklin 4 köşegeni vardır. O halde;

- i) 15 kenarlı bir şeklin.....köşegeni vardır.
ii) n kenarlı bir şeklin.....köşegeni vardır.



Ek-4. Öğrenci Günlüğü

1. Bugün derste yapılan eğitim bulma etkinliği ile daha iyi öğrendiğinizi düşünüyor musunuz? Cevabınızı açıklayınız.
2. Derste yaptığımız çevre uzunluğu verilen dikdörtgenin kenar uzunluklarını inceleyip grafiğe döktüğümüz etkinlikte yeni öğrendiğiniz ne oldu? Fark ettiğiniz bir ilişki oldu mu?
3. Bugünkü derste hangi etkinlik daha çok öğrenmenizi sağladı? Neden?
4. Sizce bugünkü derste ne olsa daha çok şey öğrenirdiniz?
5. Bu derste önceden bilmeyip de yeni öğrendiğiniz ne oldu?
6. Bugünkü derste en çok ilginizi çeken şey neydi?
7. Bugünkü derste çözmekte ya da anlamakta en çok zorlandığınız şey neydi? Bu zorluğu gidermek için ne yaptınız?
8. Matematik dersinin bu şekilde işlenmesi benim daha iyi anlamamı ve öğrenmemi sağlıyor. Çünkü.....
9. Bugün yeni öğrendiğim konusu çok ilgimi çekti. Çünkü.....
10. Bu dersler sonunda verilen ödevler benim daha iyi öğrenmemi sağlıyor. Çünkü.....
11. Bu derslerde çözdüğümüz sorular, onları çözmem için bende istek uyandırıyor. Çünkü.....
12. Bu derste en çok kafamı karıştıran şey.....
13. İşlediğimiz bu matematik dersleri benziyor. Çünkü.....
14. Daha önce anlamakta zorlandığımkonusunu, bugün daha iyi anladım. Çünkü.....
15. Bu uygulama sayesinde matematikteki en büyük eksikliğimin olduğunu fark ettim.

Ek-5. Araştırmacı Öğretmen Günlüğü

1. Bugün hangi konular öğretildi?
2. Bugünkü ders hakkındaki görüşleriniz nelerdir?
3. Derste öğrencilerin yaptıkları hatalar/kavram yanlışları nelerdir?
4. Bu derste öğrencilerin cebir dersini öğrenmesi hakkında ilginizi çeken ne oldu?
5. Size göre öğrenciler bugün neyi iyi anladılar? Öğrencilerin öğrenmelerinde dikkatinizi çeken bir şey oldu mu?
6. Eğer bu konuyu siz verecek olsaydınız, neyi farklı verirdiniz?
7. Eklemek istediğiniz bir şey var mı? (bu yöntemi siz derslerinizde kullanmak ister misiniz, dersin bu şekilde işlenmesinin olumlu/olumsuz yönleri ne olurdu vb.)

Ek-6. Velilere Mektup

Sayın ...,

Ben Gülçin OFLAZ. Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Fakültesi'nde araştırma görevlisiyim. Matematik eğitimi alanında çalışıyorum.

Öncelikle ne yapmak istediğimden bahsedeyim. Öğrencilerin en zorlandıkları derslerin başında matematik gelmektedir. Ülkemizde ve dünyada pek çok matematik eğitimcisi öğrencilerin matematiği nasıl daha iyi öğrenebileceği hakkında çalışmakta ve çeşitli yaklaşımlar geliştirmektedirler. Benim çalıştığım konu olan DNR tabanlı matematik öğretimi de bu yaklaşımlardan biridir. DNR tabanlı matematik öğretimi yurt dışında üzerinde çokça çalışılmış ve öğrencilerin matematiksel muhakeme yeteneklerini geliştirdiği düşünülen bir yaklaşımdır. Ben de bu yaklaşımı temele alarak oluşturduğum öğretim programında öğrencinizle birlikte çalışmak istiyorum.

Tasarladığım derslerin nasıl olacağından bahsedeyim. Bu dersler 15 Şubat 2016 tarihinden itibaren 7 hafta sürecektir. Dersler her haftanın pazartesi, çarşamba ve perşembe günleri okul bitiminden sonraki iki saatte ve matematik sınıfında yapılacaktır. Dersleri 12 öğrenci ile ve matematik öğretmeni ile birlikte yürüteceğiz. Derslerde öğrencilerin cebir dersinde zorlandıkları konular üzerinde çalışacağız. Bu yönüyle bu derslere katılmalarının, öğrencinizin TEOG sınavındaki başarılarını artıracak da düşünülmektedir. Ders sonunda verilen ödevlerle öğrencilerin bu konuları pekiştirmeleri sağlanacaktır. Dolayısıyla öğrencilerin bu derslere devamsızlık yapmadan katılmaları, o gün verilen dersi kaçırmamaları açısından oldukça önemlidir. Ayrıca sürecin nasıl işlediğini kayıt altına almak üzere sınıf ortamı bir video kamera ile kayıt edilecektir. Derslerin kayıt altına alınması eğitim bilimlerinde sıkça kullanılan bir veri toplama aracı olup bunun tek amacı daha sonra gerekli analizlerin yapılmasıdır. Öğrencinizin kimliği kesinlikle hiçbir birimde paylaşılmayacaktır.

Sanıyorum ne yapmak istediğimi açıkladım. Bunun dışında aklınıza takılan herhangi bir şey için beni arayabilirsiniz. Aşağıda adresim ve cep telefonu numaram bulunmaktadır. Öğrencinizle çalışmam için izin verirseniz ve bu belgeyi imzalarsanız çok memnun olurum.

Saygılar...

Arş. Gör. Gülçin OFLAZ

Ek-7. İzin Yazısı



T.C.
SİVAS VALİLİĞİ
İl Millî Eğitim Müdürlüğü

Sayı : 92255297-605.01-E.1480996

09.02.2016

Konu: Araştırma İzni
(Gülçin OFLAZ)

VALİLİK MAKAMINA

- İlgi :a) Cumhuriyet Üniversitesi Rektörlüğünün 02/02/2016 Tarih ve 74817733-774/234/438 Sayılı Yazısı.
b) Milli Eğitim Bakanlığı Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğünün 07/03/2012 Tarihli B.08.0.YET.00.20.00.0-3616 Sayılı 2012/13 No'lu Genelgesi.
c) Valilik Makamının 10/04/2015 Tarihli ve 92255297-605-3872938 Sayılı Onayı.

Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü İlköğretim Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı Araştırma Görevlisi Gülçin OFLAZ'ın, " Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Genelleme Süreçlerine İlişkin Anlama ve Düşünme Yollarının Belirlenmesi: DNR Tabanlı Bir Öğretim Deneyi" konulu araştırma çalışması kapsamında, ilimiz merkez ilçede bulunan [redacted] 'ın sınıfındaki öğrencilere yönelik araştırma çalışması yapmak istemektedir.

İlgi (a) yazı ekindeki anket soruları, Valilik Makamının İlgi (c) Onayı ile oluşturulan Araştırma Değerlendirme Komisyonu tarafından incelenmiş olup anketin, eğitimin aksatılmaması kaydıyla [redacted] sınıfındaki öğrencilere uygulanmasında bir sakınca görümemektedir.

Makamlarınızca da uygun bulunduğu takdirde onaylarınıza arz ederim.

Celal KARAHAN
Müdür a.
Müdür Yardımcısı

OLUR
09.02.2016

Mustafa ALTINSOY
Vali a.
Millî Eğitim Müdürü

Güvenli Elektronik İmza
Aşlı ile Aynıdır.
09/02/2016
Lutfi KELDAL
Şef

Muhsin Yazıcıoğlu Bulvarı No:23 SİVAS
Elektronik Ağ: <http://sivas.meb.gov.tr>
E-posta: argo58@meb.gov.tr; istatistik58@meb.gov.tr

Bilgi için: L.KELDAL - Şef
Tel: 0 346 224800 132
Faks: 0 346 2270639

Bu evrak güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır. <http://evraksorgu.meb.gov.tr> adresinden 260a-cde1-3ef9-8684-d357 koda ile teyit edilebilir.



GAZİ GELECEKTİR..