

HRT4005 - UYDU JEODEZİSİ

2022 - 2023 GÜZ YARIYILI

ARŞ. GÖR. DR. HÜSEYİN DUMAN

hduman@cumhuriyet.edu.tr

<https://avesis.cumhuriyet.edu.tr/hduman>

HRT4005 - UYDU JEODEZİSİ	
Dersin Dili	Türkçe (Zorunlu)
Teorik - Kredi - AKTS	2 Saat/Hafta - 2 - 5
Değerlendirme yöntemi	Vize + Ödev(?) + Final

Ders Kaynakları

- Hofmann-Wellenhof, B., Lichtenegger, H., & Wasle, E. (2007). GNSS–global navigation satellite systems: GPS, GLONASS, Galileo, and more. Springer Science & Business Media.
- Kurt, O. (2022). *Space Geodesy Class Notes*. Retrieved from Kocaeli University, HRT434 Space Geodesy.
- Seeber, G. (2008). *Satellite Geodesy*. Berlin, New York: De Gruyter. <https://doi.org/10.1515/9783110200089>
- Şanlı, D. U. (2022). *Satellite Geodesy Class Notes*. Retrieved from Yıldız Technical University, HRT2132 Satellite Geodesy.

1. HAFTA: Uydu Jeodezisine Giriş

- **Jeodezi**, Helmert'in tanımı ile

“the science of the measurement and mapping of the Earth's surface”

yeryüzünün ölçülmesi ve haritalanması bilimidir.

- **Uydu jeodezi** ise,
 - genel olarak yapay uydular aracılığı ile jeodezi problemlerinin çözümü olarak tanımlanabilir.

Jeodezinin temel problemleri?

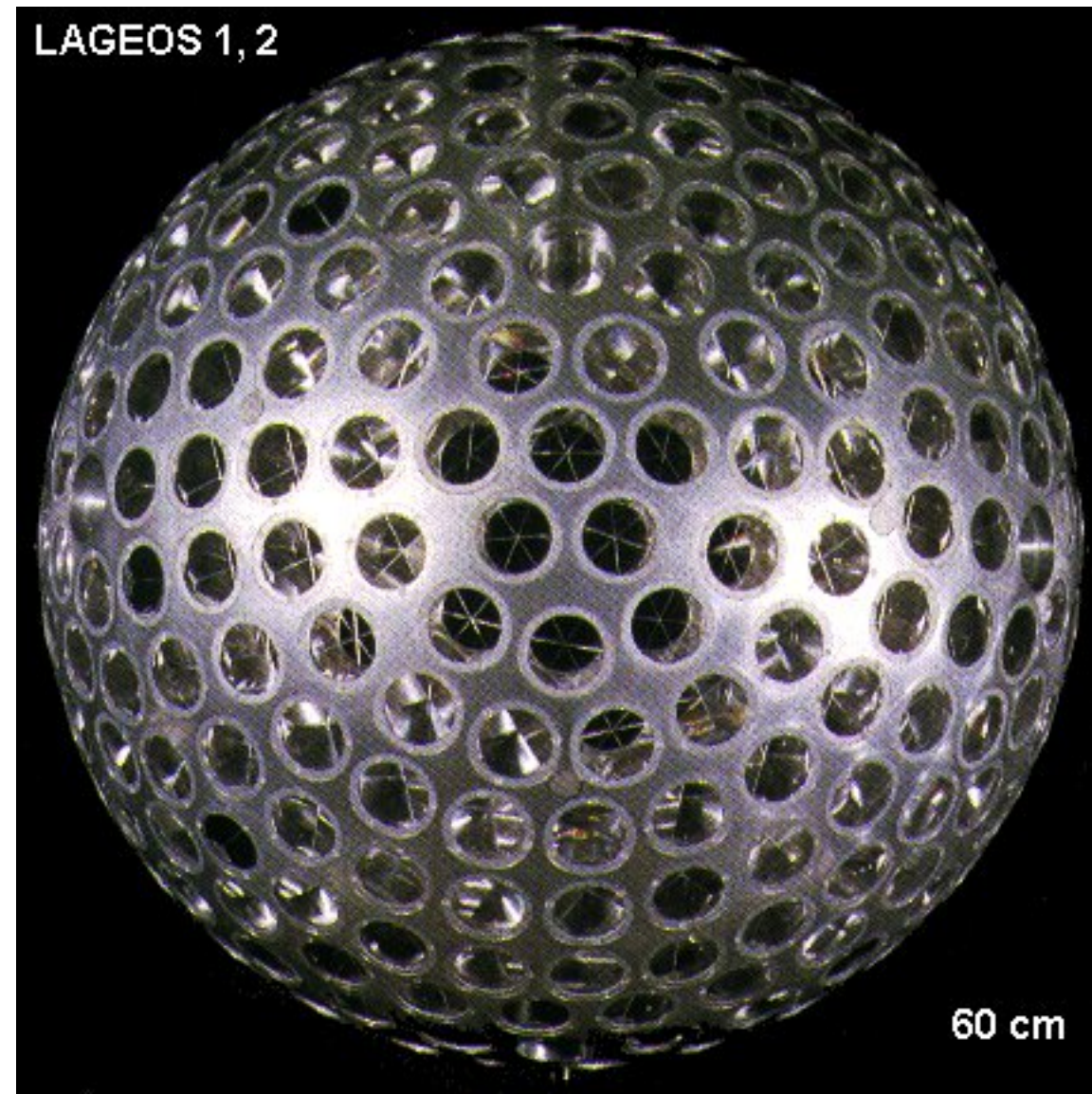
- Küresel, bölgesel ve/veya yerel üç boyutlu hassas koordinatların belirlenmesi
- Yeryuvarı gravite alanını ve bu alanın doğrusal fonksiyonlarının belirlenmesi (örn: Küresel, bölgesel jeoit modelleri)
- Jeodinamik olguların ölçülmesi ve modellenmesi (örn: kutup gezinmesi, Dünyanın dönüşü, yeryüzü deformasyonları)

Uydu jeodezisine neden ihtiyaç duyuyoruz?

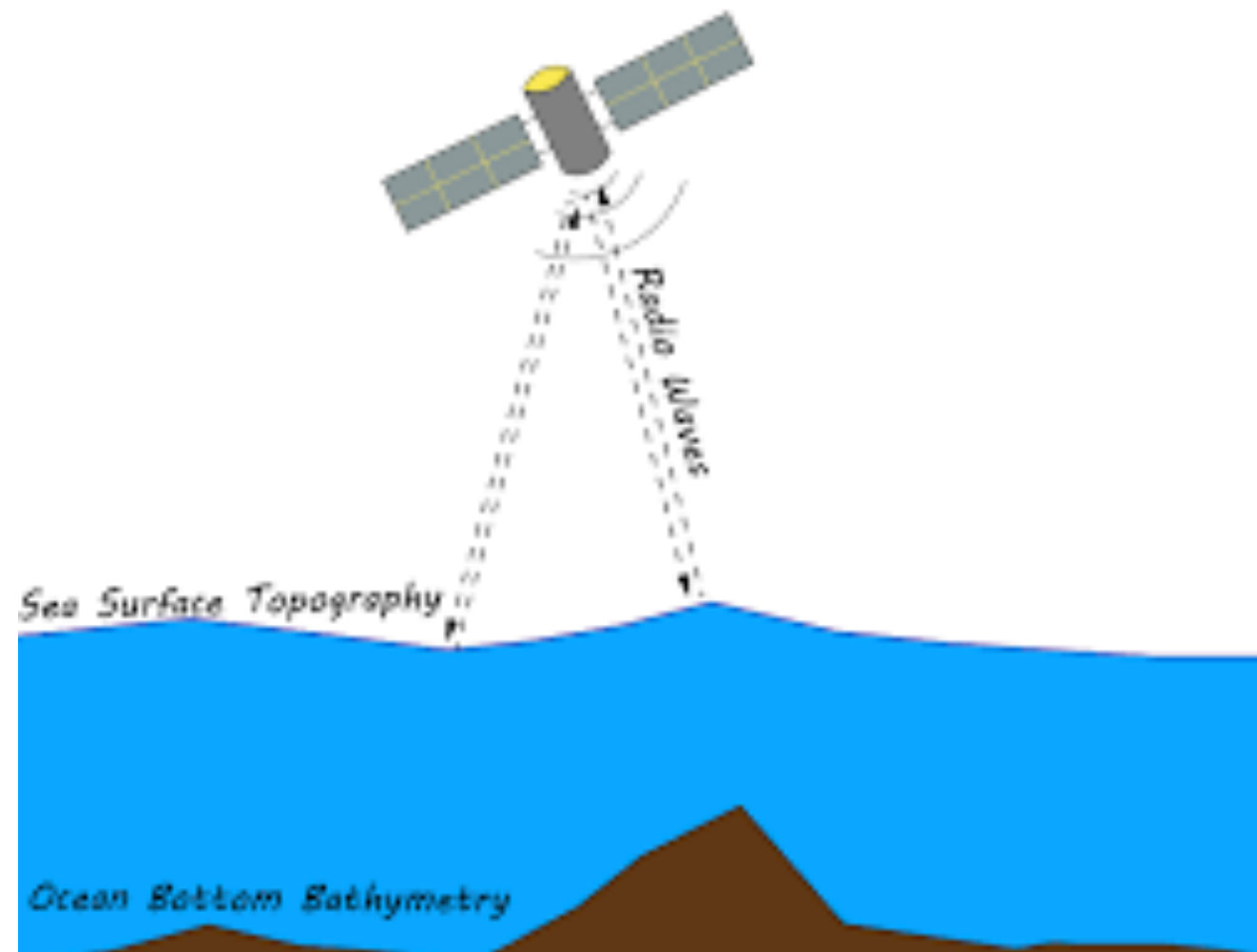
- Astronomik gözlemlere dayalı kıtalar arası gözlemlerin (geleneksel jeodezik yöntemler ile) yeterince duyarlı olmaması
- Jeodezik noktalar arası görüş zorunluluğunun olmaması
- Global ya da bölgesel (yersel yöntemlerle ölçülemeyecek kadar büyük!) ölçekte
 - Deformasyon çalışmaları
 - Gravite alanlarının belirlenmesi
 - Koordinat sistemleri tanımı
 - Tanımlı koordinat sistemlerinde kontrol ağlarının oluşturulması

Uydu ölçme teknikleri,

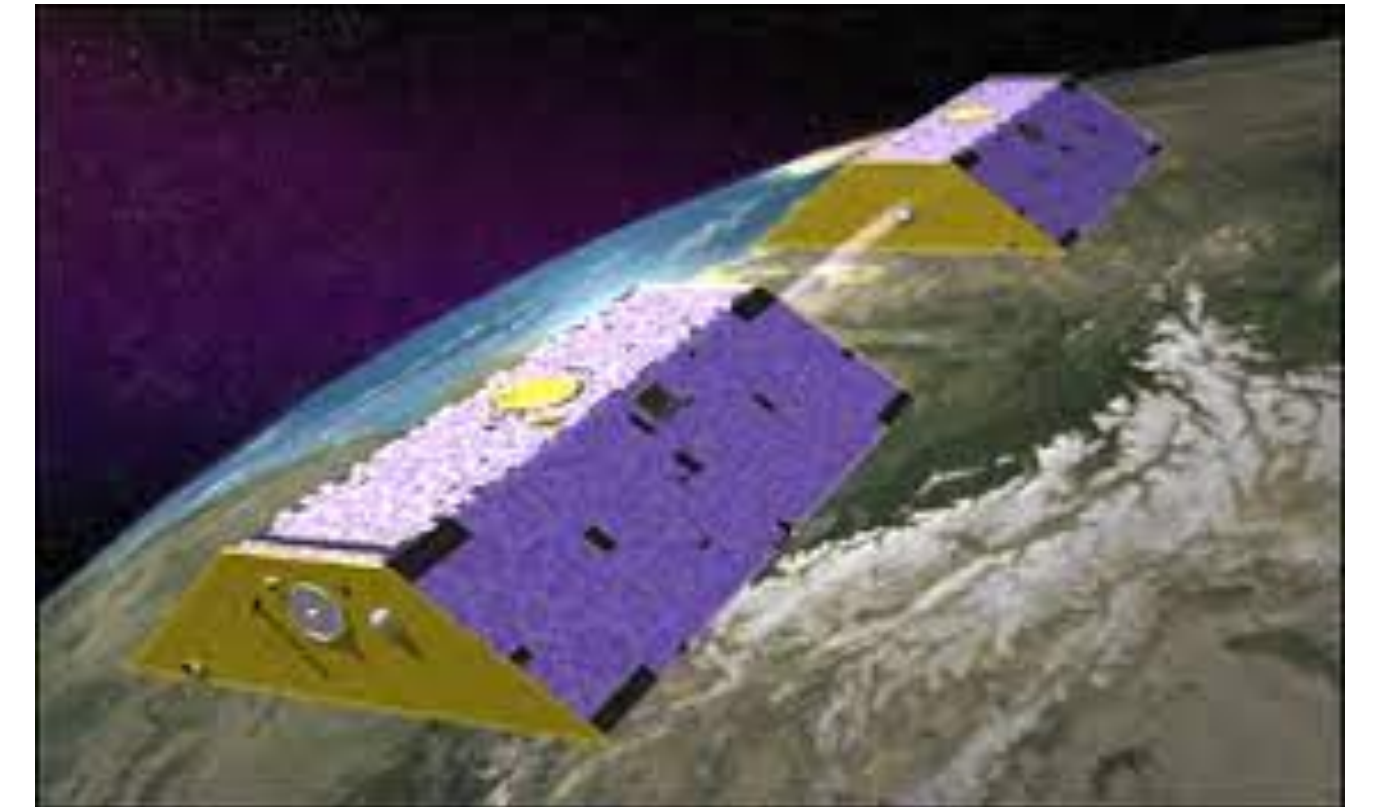
- Yerden uyduya (örn: SLR, DORIS, GNSS)



- Uydudan yere (örn: altimetre)

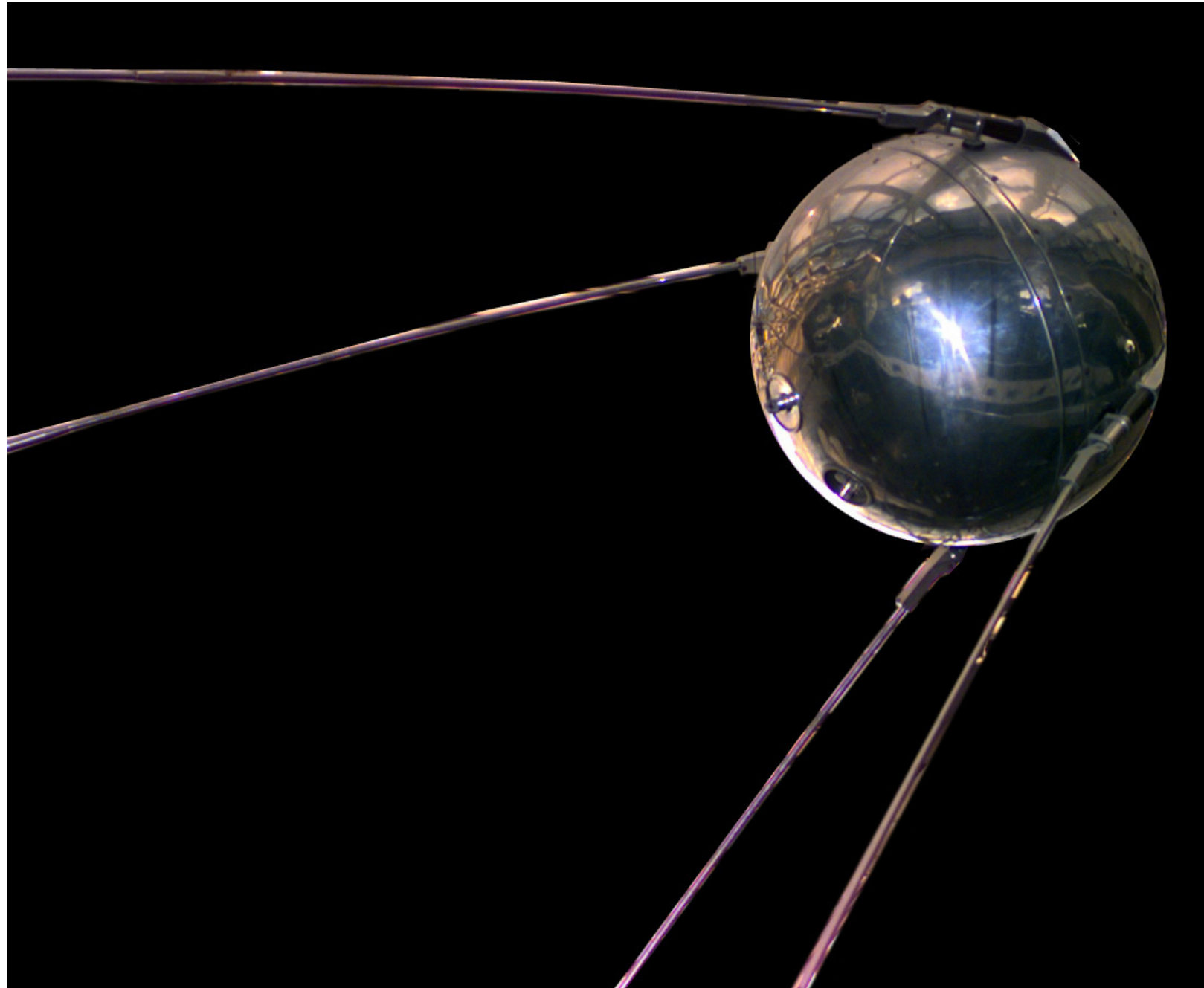


- Uydudan uyduya (örn: GRACE)



Uydu jeodezisinin tarihsel gelişimi?

- **4 Ekim 1957**, **SPUTNIK-I**
(yapay uydu sınıfı olarak)



https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/be/Sputnik_asm.jpg

- Doğal uydu sınıfı olarak **19. yüzyılın başları**na dayanmaktadır.
- Laplace 1802 yılında, **Ay'ın** düğüm noktası hareketi gözlemleri ile yeryuvarının basıklığını ($1/303$) olarak elde etmiştir.

Uydu jeodezisinin tarihsel gelişimi?

- **1957 - 1970 yılları;**
 - Temel yöntemlerin gelişimi
 - Uydu gözlemleri
 - Uydu yörüngelerinin analiz ve hesaplamaları
 - Dönemin ana çıktıları
 - İlk jeopotansiyel harmonik katsayıları belirlenmesi
 - Yeryuvarı şeklinin yayınlanması
 - Standard Earth Model of Smithsonian Astrophysical Observatory (SAO SE-I to SE-III)
 - Goddard Earth Models of NASA (GEM)

Uydu jeodezisinin tarihsel gelişimi?

- **1970 - 1980 yılları;**
 - Bilimsel projeler dönemi
 - Yeni ölçüm teknikleri geliştirilmiştir
 - Örneğin; yapay uydulara, Ay'a lazer ölçümleri; uydu altimetresi
 - TRANSIT adlı uydu sistemi ile jeodezik Doppler konumlaması
 - Doppler ölçüleriyle küresel çapta yer kontrol ağı
 - Uydulardan gözlem doğruluğunun artması
 - Yer dönüklüğü, kurup hareketleri, yerkabuğu deformasyonu

Uydu jeodezisinin tarihsel gelişimi?

- **1980 - 1990 yılları;**
 - Jeodezi, jeodinamik ve ölçmede uydu tekniklerinin operasyonel kullanımı
 - Özellikle geleneksel yersel ölçmelerin yerine uydu ölçmeleri sıklıkla tercih edilmeye başlanmıştır.
 - NAVSTAR Global Positioning System (GPS) sayesinde
 - Kutup hareketi ve yer dönüklüğü çalışmalarında klasik astrojeodezik yöntemlerin yerini önemli ölçüde almıştır (artan ölçme doğruluğu sayesinde)
 - Yine ölçme doğruluğunun artmasına paralel olarak yerkabuğu deformasyonlarının anlaşılmasında önemli projeler yürütülmüştür.

ULUSLARASI

- GNSS referans verileri için
 - CORS → U.S.A
 - CACS → Kanada
 - SAPOS → Almanya
 - TUSAGA → Türkiye (2000'den sonra) <https://www.tusaga-aktif.gov.tr/>



Uydu jeodezisinin tarihsel gelişimi?

- **2000'den sonra;**
 - Yarım asrın ardından ...
 - Yersel, zamansal çözünürlükte, uydu ölçme doğruluklarında çok önemli ilerlemeler kaydedilmiştir.
 - Hem bilimsel hem de uygulama anlamında yeni alanlar ortaya çıkmıştır.
 - **Örn:** Interferometrik Synthetic Aperture Radar

2. HAFTA: Referans Koordinat Sistemleri ve Zaman Sistemleri

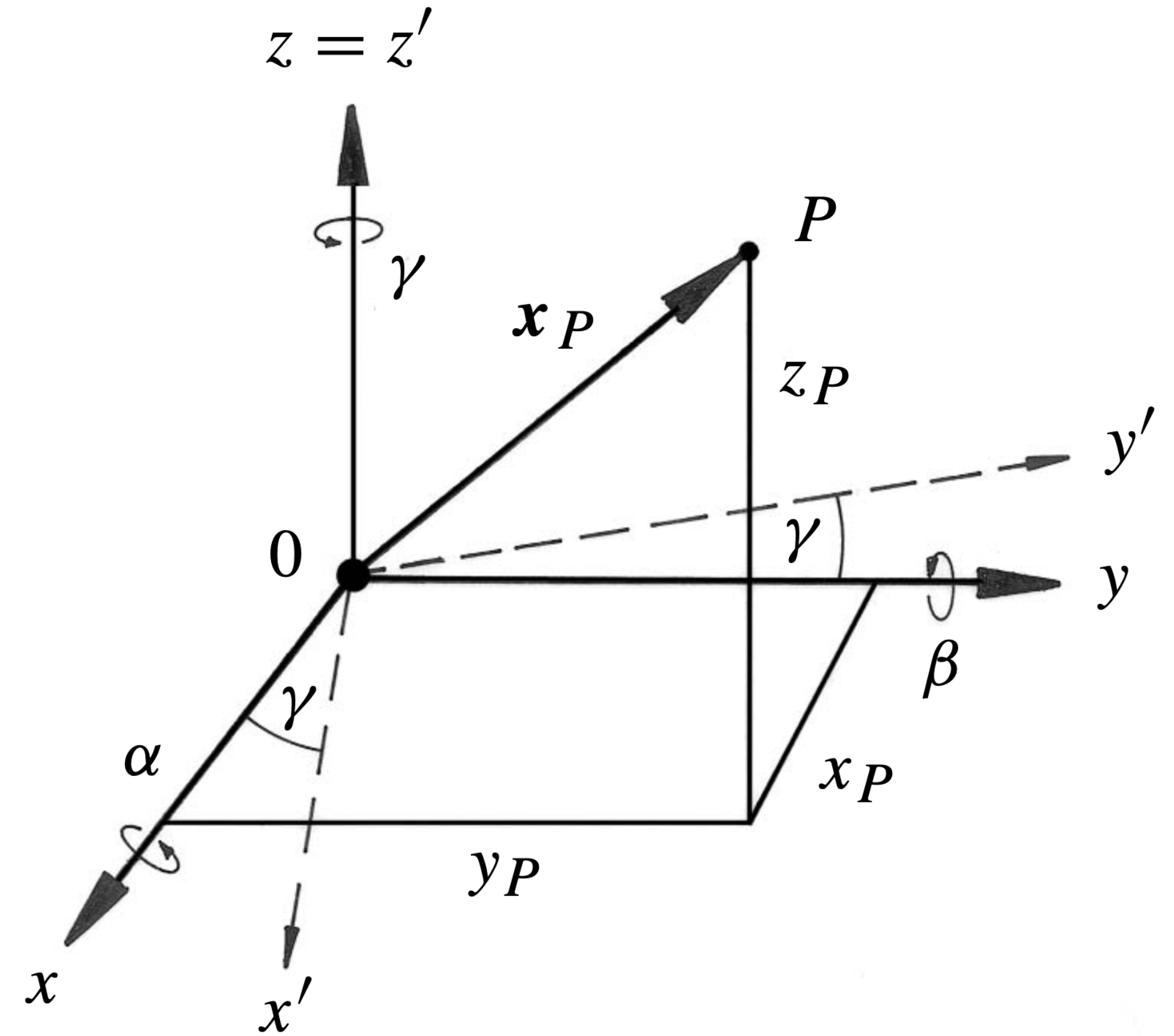
- Uydu jeodezisinde referans koordinat sistemleri,
 - Uyduların hareketinin tanımlanması
 - Gözlemlerin modellenmesi
 - Sonuçların irdelenip yorumlanması
- **Uyduların hareketi**; yerin çekimiyle / yerin kütle merkezine
 - Referans koordinat sistemleri ➡ Global ve yer merkezlidir.
- Uydu gözlem tekniklerinin artan doğruluğu,
 - Referans koordinat sistemlerinin doğruluğunda artış **gerektirir** (sürdürülebilirlik!)

Gereklilik

Kartezyen koordinat sistemleri ve dönüşümleri

- 0 $\rightarrow$ başlangıç noktası
- Her iki koordinat sistemi z dönme eksenini boyunca çakışık
- P noktasının koordinatları,

$$\mathbf{x}_P = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix}$$

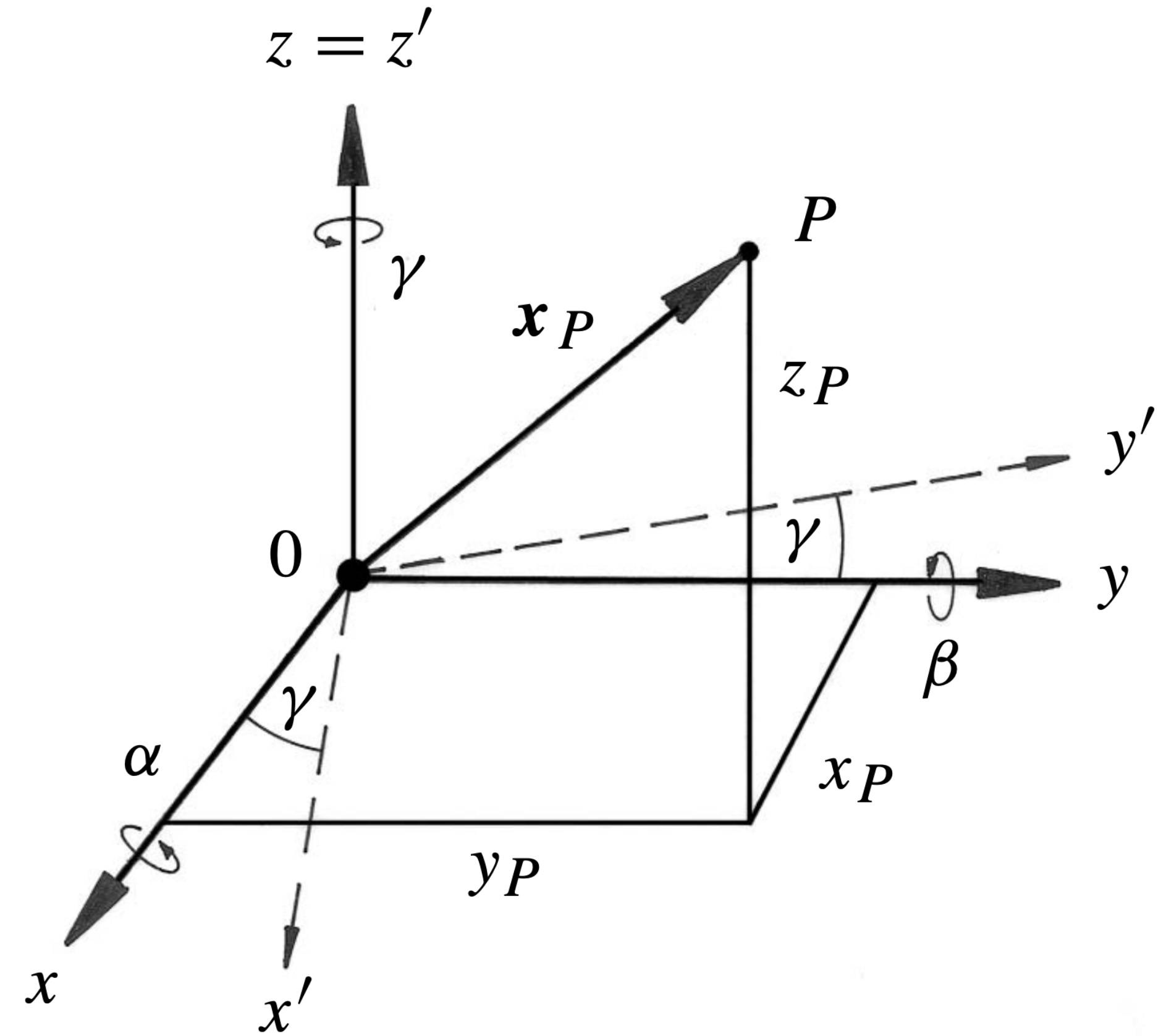


Kartezyen koordinat sistemleri ve dönüşümleri

- $\mathbf{x}'_P \rightarrow \mathbf{x}_P$ (yalnızca z-ekseni boyunca dönüklük olduğunda)

$$\mathbf{x}'_P = \mathbf{R}_3(\gamma)\mathbf{x}_P$$

$$\mathbf{R}_3(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Kartezyen koordinat sistemleri ve dönüşümleri

- $\mathbf{x}_P''' \rightarrow \mathbf{x}_P$ (her üç eksen boyunca dönüklük olduğunda ise)

$$\mathbf{R}_1(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \mathbf{R}_2(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_P''' = \mathbf{R}_1(\alpha)\mathbf{R}_2(\beta)\mathbf{R}_3(\gamma)\mathbf{x}_P$$

$$\mathbf{R}_1(\alpha)\mathbf{R}_2(\beta)\mathbf{R}_3(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\beta \cdot \cos\gamma & \cos\beta \cdot \sin\gamma & -\sin\beta \\ \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\gamma - \cos\alpha \cdot \sin\gamma & \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma + \cos\alpha \cdot \cos\gamma & \sin\alpha \cdot \cos\beta \\ \cos\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\gamma + \sin\alpha \cdot \sin\gamma & \cos\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma - \sin\alpha \cdot \cos\gamma & \cos\alpha \cdot \cos\beta \end{bmatrix}$$

Kartezyen koordinat sistemleri ve dönüşümleri

- $\mathbf{x}_P''' \rightarrow \mathbf{x}_P$
 - $\alpha, \beta, \gamma \cong 0.0...$ (genellikle dönüklükler küçük değerlere sahiptir)
 - $\cos \alpha \cong 1$ ve $\sin \alpha \cong \alpha$ (radyan cinsinden)

$$\mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 1 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

NOT: Bu dönüşüm problemi yalnızca dönüklükler üzerinden değerlendirilmiştir. Ancak, iki koordinat sistemi arasında dönüklüklere ek olarak **ölçek faktörü** ve **ötelemelerde** vardır.

3B Kartezyen Koordinat Sistemleri Arasında Dönüşüm?

- Dönüklükler, ölçek faktörü ve ötelemelerin dikkate alındığı 7 parametreleri Helmert Benzerlik dönüşümü

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + (1 + k) \begin{bmatrix} 1 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 1 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

- x_0, y_0, z_0 —> ötelemeler
- k —> ölçek faktörü
- α, β, γ —> dönüklükler

Terminolojik olarak;

- **Referans sistemler**, bir koordinat sisteminin nasıl oluşturulduğunun genel bir tanımıdır.
 - Ağırlık merkezi (origin)
 - Sistemi oluşturan temel düzlemler ya da eksenlerin yönleri
- **Referans ağı** ise pratik olarak gözlemlere dayalı bir referans sisteminin oluşturulması olarak tanımlanabilir.
 - Gökyüzünde, sabit konumlu tanımlanabilir objeler (yıldız, kuasar)
 - Dünya üzerinde sabit ölçüm istasyonlar

Uydu jeodezisinin temel iki referans sistemi

- **CIS:** Conventional inertial reference frame (geleneksel inersiyal referans ağı)

- Uyduların hareketlerini tanımlamak için

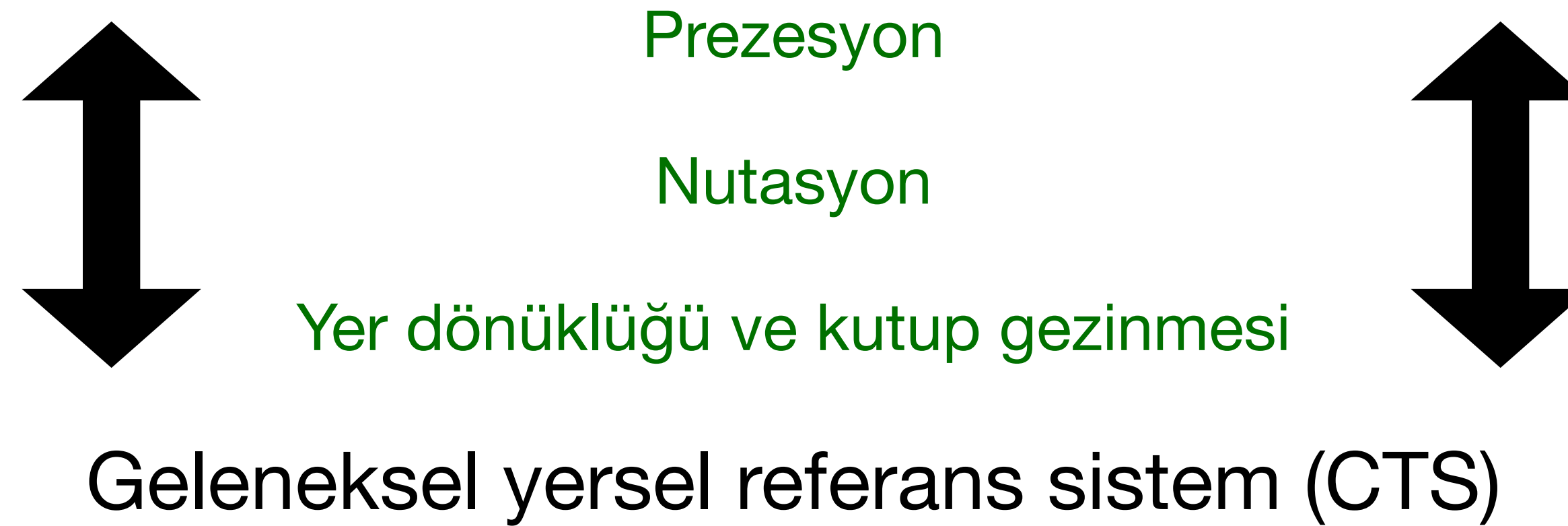
İnersiyal (atalet ya da eylemsizlik), cisimlerin birbirlerine göre sabit hızla hareket etmesi ya da hareketsiz olması durumudur.

- **CTS:** Conventional terrestrial reference frame (geleneksel yersel referans ağı)

- Konumlandırma (point positioning)
- Uydu jeodezisiyle elde edilen sonuçların açıklanması
- Örneğin:
 - **ITRS:** International terrestrial reference system
 - **ITRF:** International terrestrial reference frame

CIS ve CTS arasındaki ilişki?

Uzay sabit ekvatoryal sistem (Conventional Inertial Reference System, CIS)

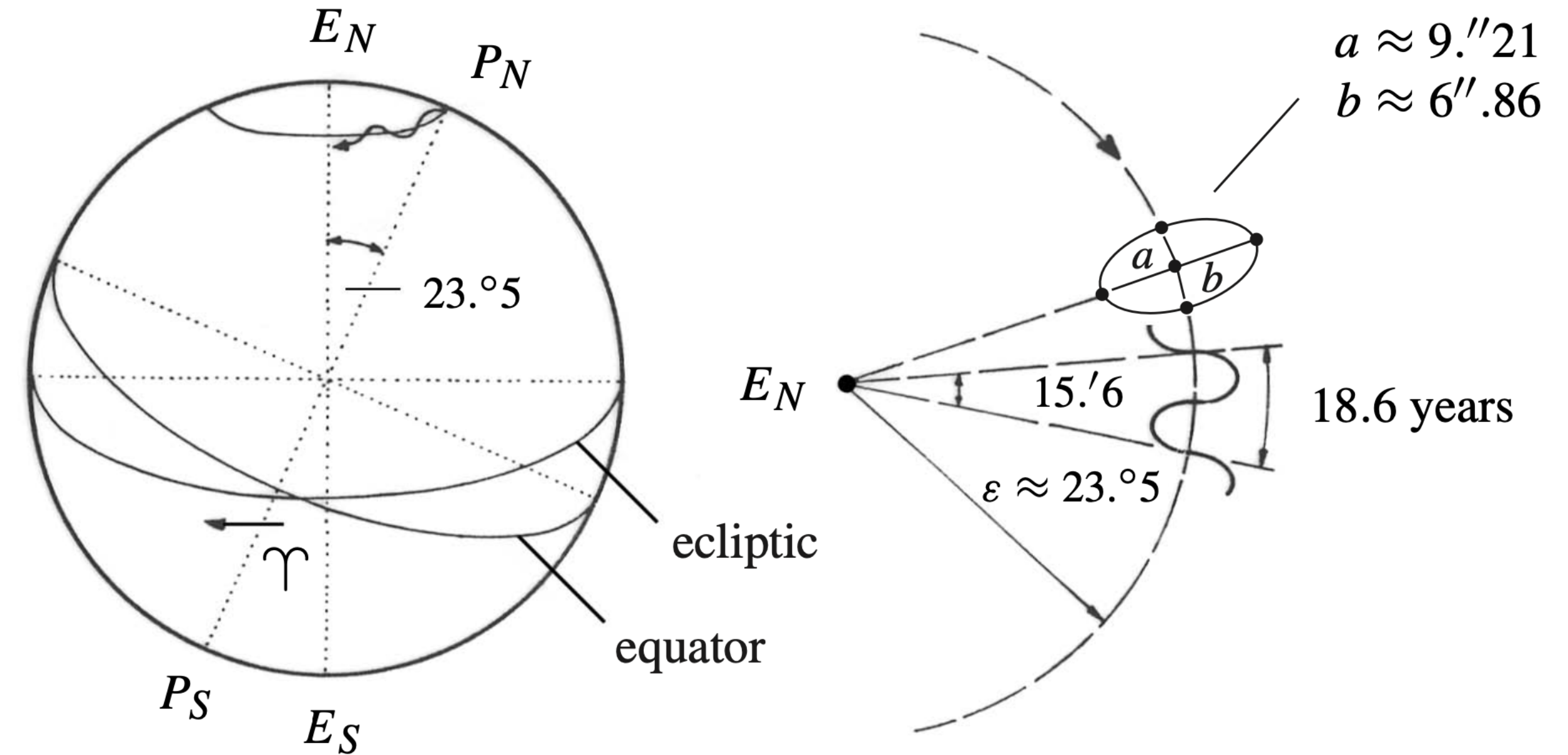


$$\mathbf{r}_{CTS} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{r}_{CIS}$$

Yüksek doğruluklu güncel modeller, $\mathbf{S}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{P}$ dönüşüm matrisleri için (Petit and Luzum, 2010).

Prezesyon ve Nutasyon

- Yer dönme eksenini ve ekvator düzlemi. ay ve güneşin yer çekiminden kaynaklı uzayda sabit değildirler.
- Bu salınım (devinim) hareketinin bileşenleri,
 - Yer dönme ekseninin ekliptik kutup etrafındaki salınımı (**prezesyon**)
 - Bu hareket devam ederken meydana gelen periyodik salınımlar (**nutasyon**)

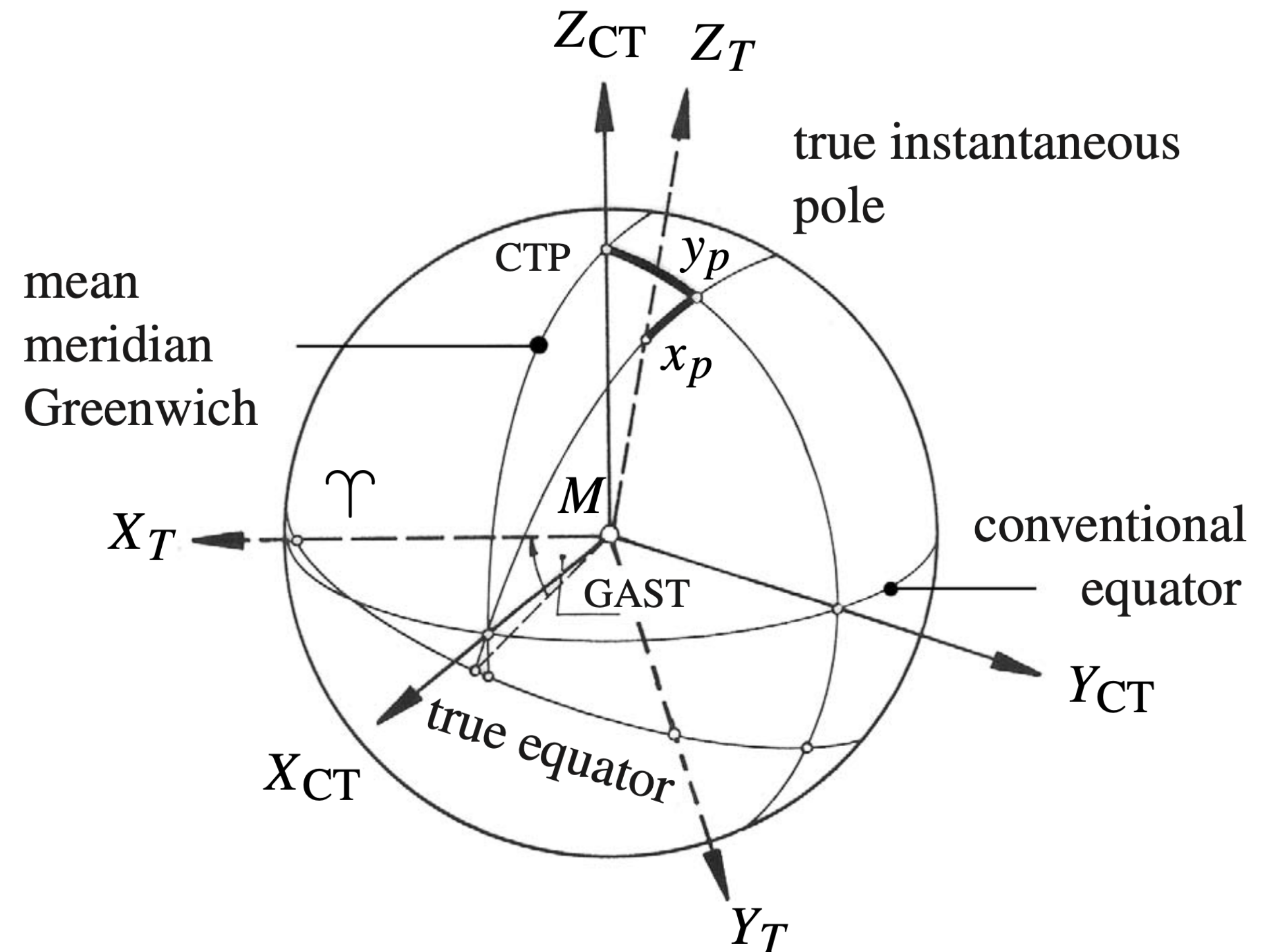


Yer dönüklüğü ve Kutup Gezinmesi

- Yer dinamiklerinden dolayı, gerçek (anlık) kutup yersel referans sistemine göre sürekli hareket etmektedir.
- Anlık durum yer dönme ekseninin (Z_T), yersel referans sistemine (Z_{CT})
 - Earth rotation parameter (ERP),
 - Earth orientation parameter (EOP)

bir başka ifade ile

- GAST (Greenwich gerçek yıldız zamanı)
- (X_p, Y_p)



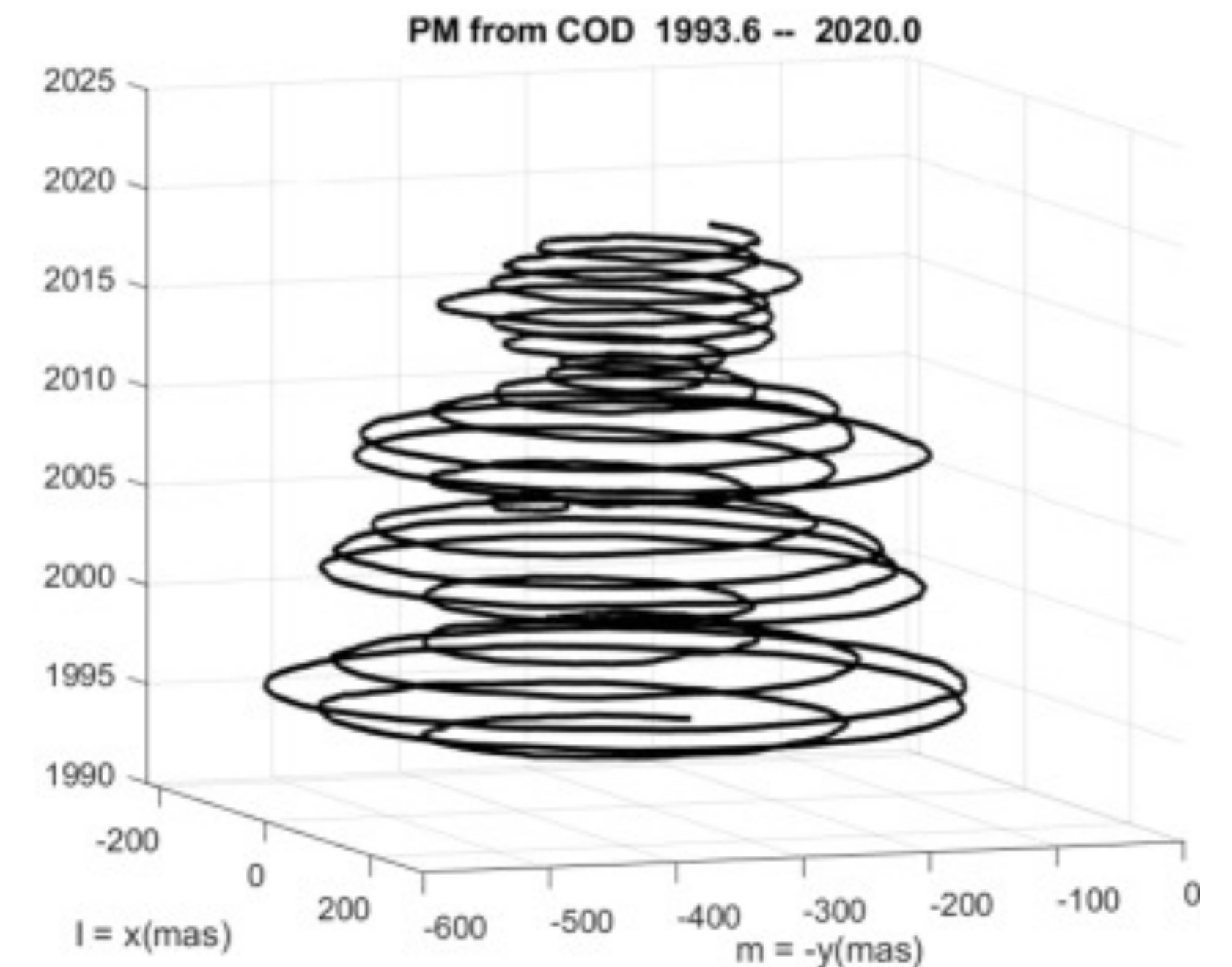
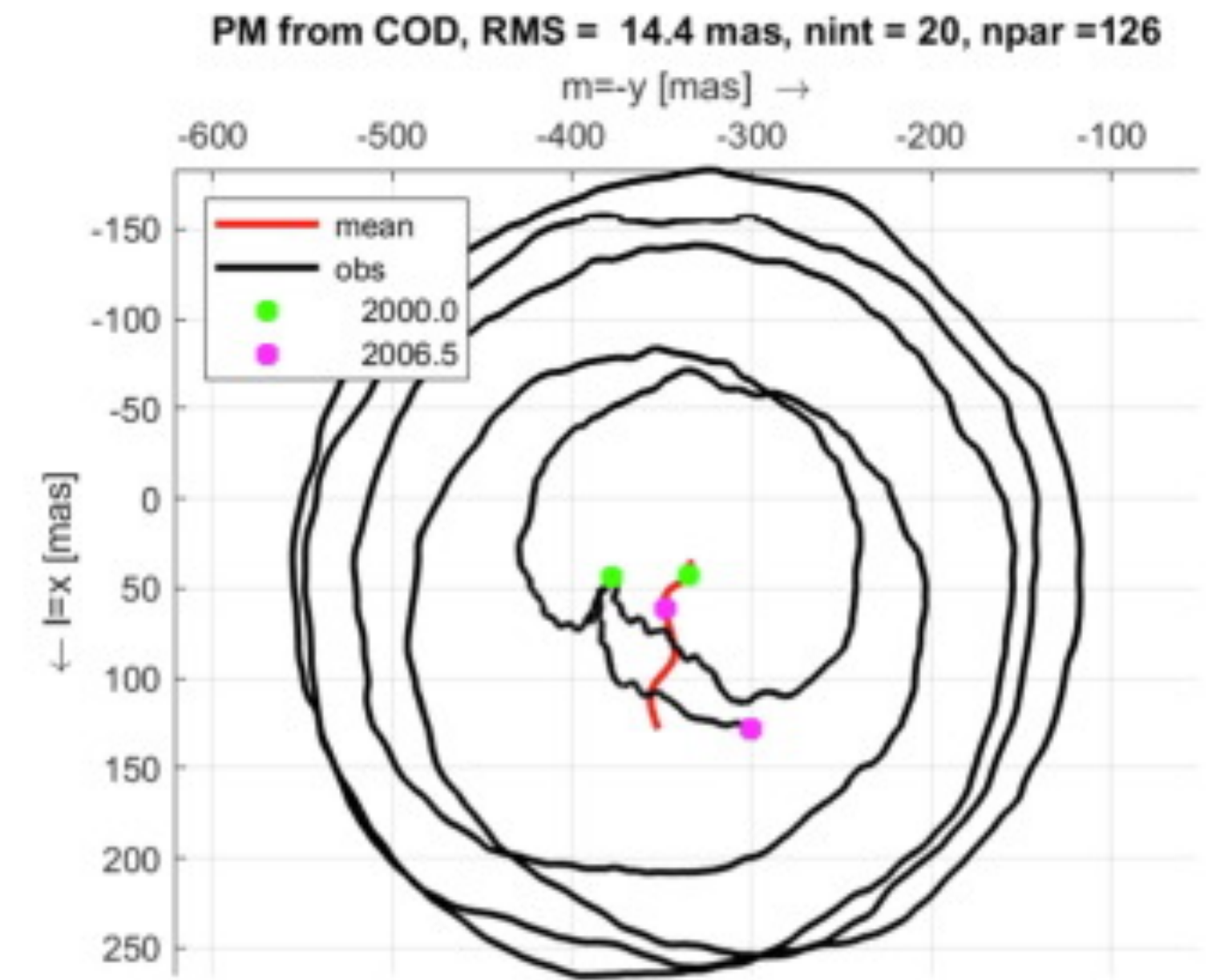
Yer dönüklüğü ve Kutup Gezinmesi

- Yer dinamiklerinden dolayı, gerçek (anlık) kutup yersel referans sistemine göre sürekli hareket etmektedir.
- Anlık durum yer dönme ekseninin (Z_T), yersel referans sistemine (Z_{CT})
 - Earth rotation parameter (ERP),
 - Earth orientation parameter (EOP)

bir başka ifade ile

- GAST (Greenwich gerçek yıldız zamanı)
- (X_p, Y_p)

https://www.iers.org/IERS/EN/Home/home_node.html



Zaman Sistemleri

Sidereal Time

- **Yıldız zamanı (ya da evrensel zaman):** yeryüzü gözlemlerini uzay sabit referans sistemlerle ilişkilendirmek için

Ephemeris Time

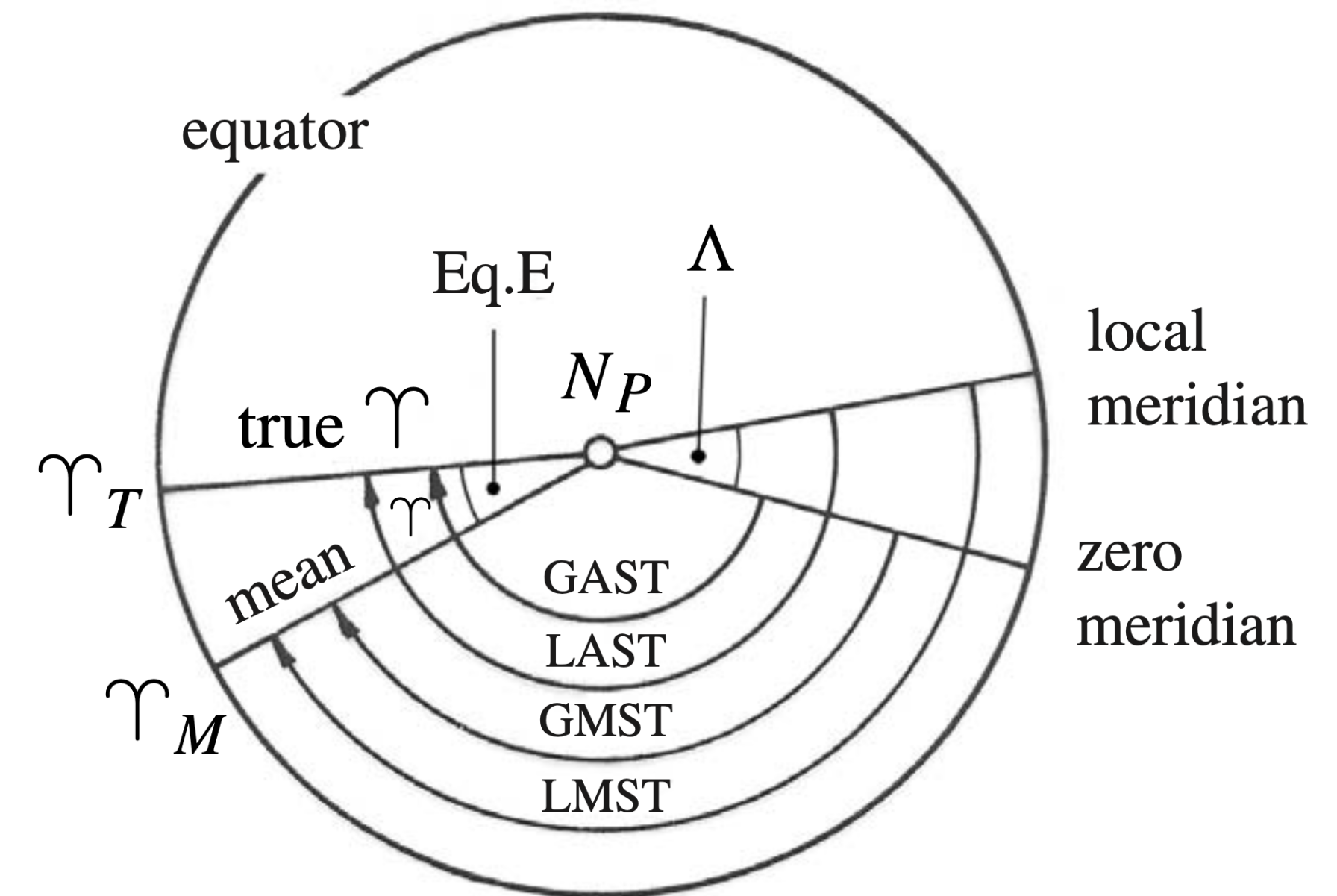
- **Efemeris zamanı (dinamik ya da yersel zaman):** uyduların yörüngedeki hareketlerinin izlenmesi için

Atomic Time

- **Atomik zaman:** elektromanyetik sinyallerin seyahat zamanlarının hassas tanımı için

Sidereal Time (Yıldız Zamanı)

- Yerin dönmesinin bir ölçüsüdür ve bahar noktasından olan saat açısı ile tanımlanır.
 - LAST: local hour angle of true vernal equinox (gerçek bahar noktasından yerel saat açısı)
 - GAST: Greenwich hour angle of true vernal equinox (gerçek bahar noktasından Greenwich saat açısı)
 - LMST: local hour angle of mean vernal equinox (ortalama bahar noktasından yerel saat açısı)
 - GMST: Greenwich hour angle of mean vernal equinox (ortalama bahar noktasından Greenwich saat açısı)



Sidereal Time (Yıldız Zamanı)

- UT (Universal Time), Güneşin (ekvator düzleminde düzgün biçimde hareket eden) Greenwich'e göre saat açısı

$$UT = 12^h + \text{Greenwich hour angle of mean Sun}$$

- UT zamanında salınımlar (kutup gezinmesinden kaynaklı)
 - Kutup gezinmesine göre düzeltilmiş UT zamanı UT1 olarak adlandırılır.

Efemeris zamanı (dinamik ya da yersel zaman):

- Barisentrik Dinamik Zaman (Barycentric Dynamic Time, TDB)
- Yersel Dinamik Zaman (Terrestrial Dynamic Time, TDT)
 - Dünyanın güneş etrafındaki hareketinden kaynaklı, TDT'de TDB'ye göre değişkenlikler olacaktır.
 - Uydularda, Dünya gibi aynı çekimden etkileneceği için Güneşin çekimini hesaba katmaksızın uyduların hareketini tanımlanmasında TDT kullanılabilir.
- TDT, Yersel zaman (Terrestrial Time, TT) olarakta isimlendirilir.

Atomik Zaman

- Atomik saatler ile tanımlanan bir zaman sistemidir.
- **Örn:** GPS zamanı
- **Örn:** International Atomic Time (TAI)
 - Yer merkezli yer sabit (Earth Centered Earth Fixed, ECEF) koordinat sistemlerinde kullanılan düzgün ölçekli bir zaman sistemidir.
- Güneşe göre yerin dönmesi yavaşladığı için
 - Coordinated Universal Time (UTC)
 - TAI ile bir güneş günü arasındaki senkronizasyonu sağlamak için, **leap second**)

Üç temel zaman sistemleri arasındaki ilişki

$$\text{TAI} = \text{GPST} + 19.0 \text{ sec}$$

$$\text{TAI} = \text{TDT} - 32.184 \text{ sec}$$

$$\text{TAI} = \text{UTC} + n \text{ sec}$$

$$\text{UT1} = \text{UTC} + \text{dUT1}$$

Burada, **n** leap seconds zamanı sayısı ve UTC zamanına 1 Ocak / 1 Temmuz tarihlerinde dahil edilir.

3. Hafta: Uyduların Yörünge Hareketleri

- **Göksel mekanikler:**

- Göksel kütlelerin karşılıklı çekimi altındaki hareketlerini ilgilenen bilim dalıdır.
- En sade şekli iki göksel cisimin hareketi (**iki-cisim problemi**)

- **İki-cisim problemi:**

Birbirlerinin çekimi etkisiyle hareket eden göksel cisimlerin herhangi bir zamanda verilen konum ve hız değerleriyle herhangi başka bir zamandaki konum ve hızları hesaplanabilir.

şeklinde ifade edilir.

- Örneğin; dünya yörüngesindeki uydu ve dünya arasındaki çekim ele alınırsa, uydunun kütlesi dünyaya nazaran oldukça küçük olduğu için göz ardı edilir. Uydunun herhangi bir zamandaki konum ve hız değerleri kullanılarak başka herhangi bir zamandaki konum ve hız değerleri hesaplanır.

Newton Mekanikleri

- Işık hızına yaklaşan, atom ya da atom altı parçacıkların hareketleri hariç evrendeki tüm cisimlerin hareketlerini açıklamaya çalışır.
- Newton mekaniklerinin 3 hareket yasası vardır:
 - **I. YASA (eylemsizlik yasası):** Her cisim, herhangi bir kuvvet uygulanmadığı sürece, durağanlığını ya da doğrusal hareketini (ivmesiz) sürdürme eğilimindedir.

$$\sum \mathbf{F} = 0 \Rightarrow \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0$$

- Bu yasanın koordinat sistemlerindeki karşılığı **inersiyal referans koordinat sistemleridir**.

Newton Mekanikleri (devamı)

- **II. YASA:** Cismin momentumundaki ($\mathbf{p} = m\mathbf{v}$) değişim, uygulanan dış kuvvetin büyüklüğü ile orantılı ve bu kuvvetin doğrultusu ile aynı yöndedir. Bir başka ifadeyle kütle ve ivme biliniyorsa, isme uygulanan net kuvvet;

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}$$

- **III. YASA (etki-tepki yasası):** Karşılıklı olarak birbirlerine etki eden iki ismin uyguladığı kuvvet, aynı doğrultuda ve karşıt yöndedir.

$$\mathbf{F}_{2,1} = -\mathbf{F}_{1,2}$$

$$m_1\mathbf{a}_1 = -m_2\mathbf{a}_2$$

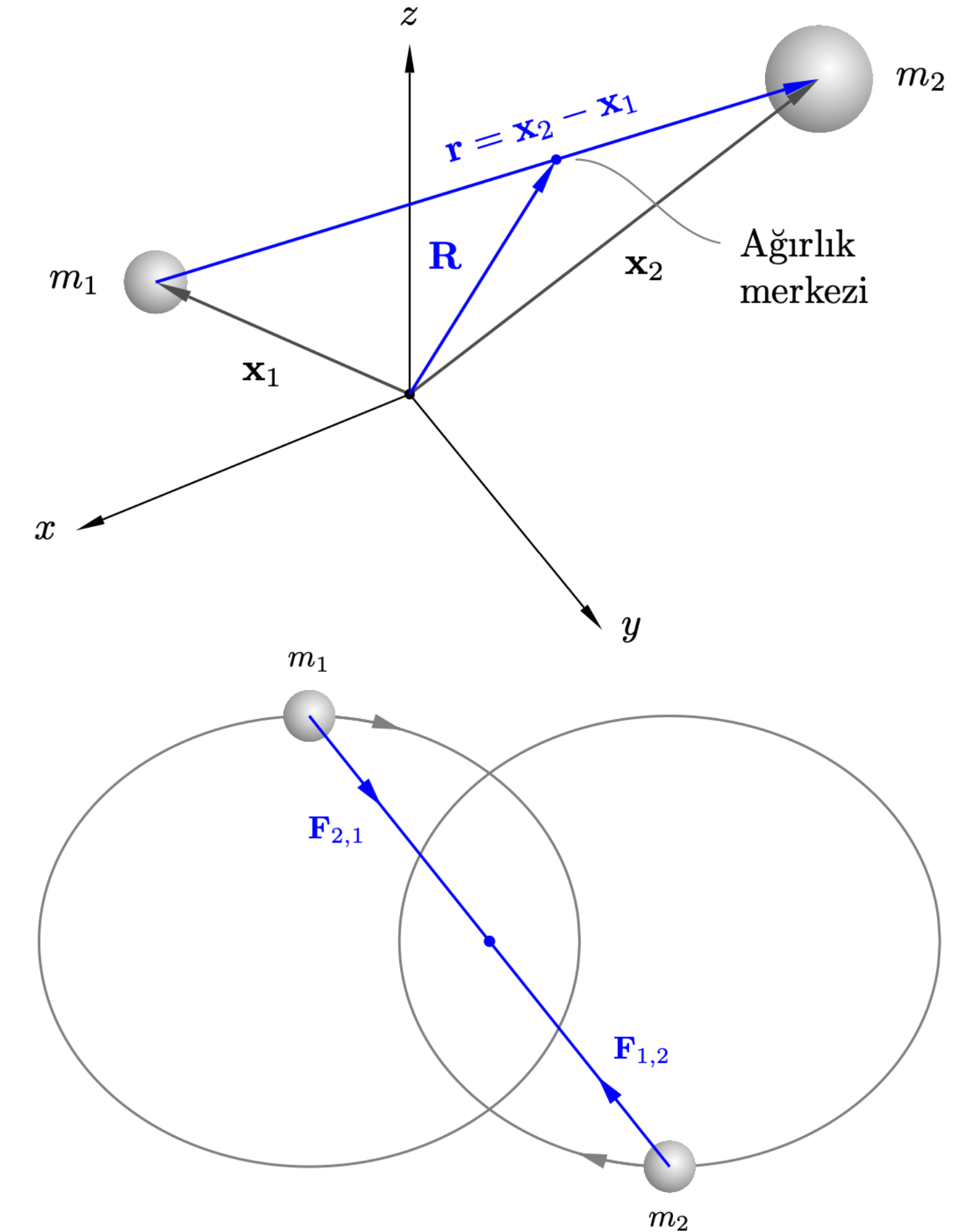
İki-cisim problemi

- En temel problem, m_1 ve m_2 kütleli birbirine karşılıklı olarak çekim uygulayan ($\mathbf{F}_{2,1} = -\mathbf{F}_{1,2}$) iki ismin hareketidir.
- İki cisim birbirlerine göre **ağırlık merkezi** etrafında hareket ederler ve hareket bir düzlem üzerinde gerçekleşir.

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2}{m_1 + m_2} \text{ (ağırlık merkezinin konumu)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{F}_{2,1} = -\mathbf{F}_{1,2} \\ m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 = -m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 \end{array} \right\} = \frac{m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2}{m_1 + m_2} = \ddot{\mathbf{R}} = 0$$

- **Ağırlık merkezi**, iki cisim arasındaki vektör üzerinde ve inersiyaldir.
- Örneğin, Dünya ve Ay

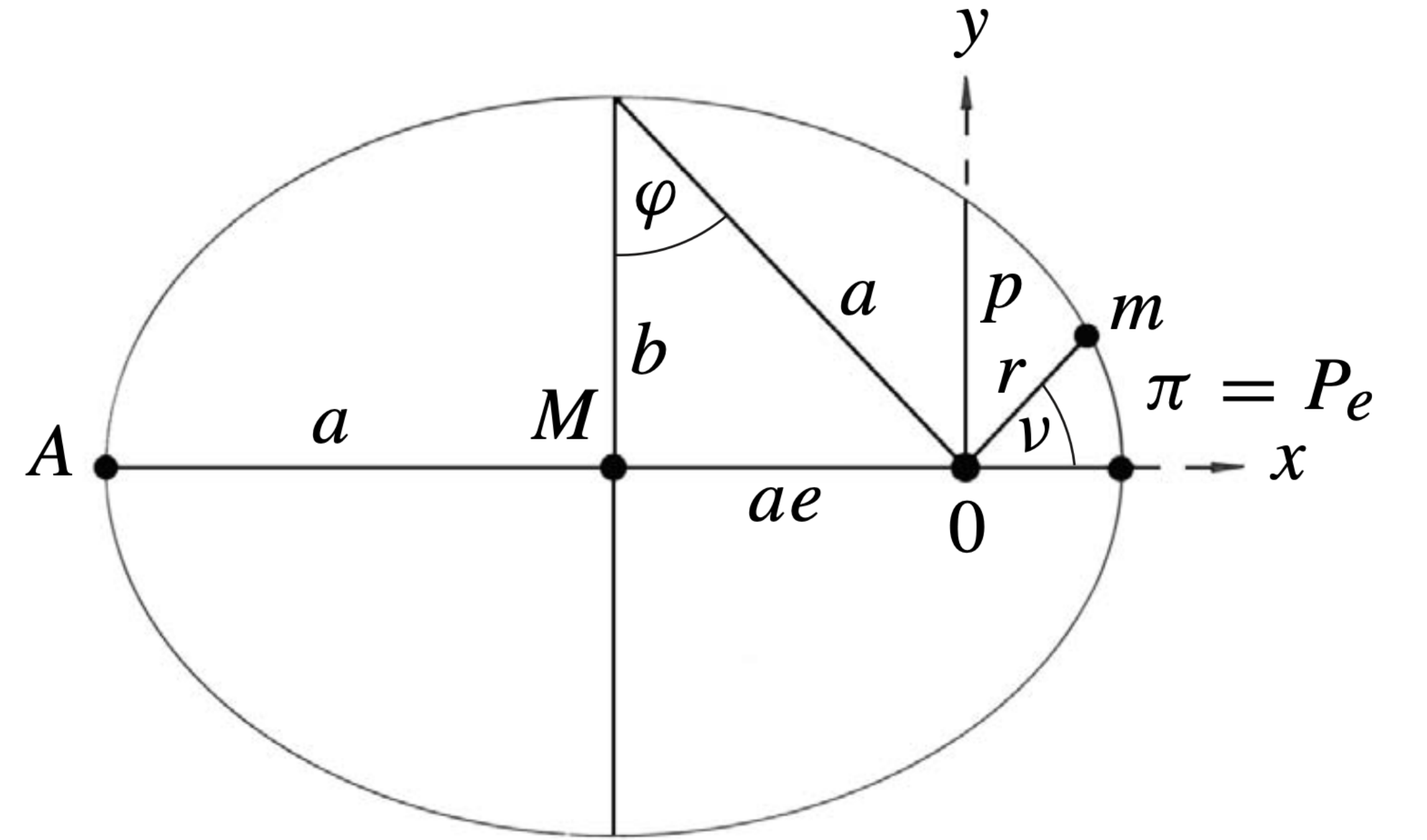


Kepler Yörünge Hareketleri

- Kepler yörünge hareketleri iki-cisim probleminin özel bir durumudur. Bu özel durum birbirine etkiyen iki cisimden birinin kütlesinin göz ardı edilebilecek düzeyde küçük olduğu durumda geçerlidir.
 - Örneğin; yapay uydu $\longleftrightarrow$ Dünya
Dünya. $\longleftrightarrow$ Güneş
- Kepler yörünge hareketi, göksel mekanikler açısından eliptik yörünge davranışlarını geometrik olarak açıklar.
- Bu geometrik özellikler ilk olarak J. Kepler (1571-1630) tarafından güneş sistemi gezegenlerinin güneş etrafındaki eliptik yörüngelerini açıklamak için ortaya konmuştur.

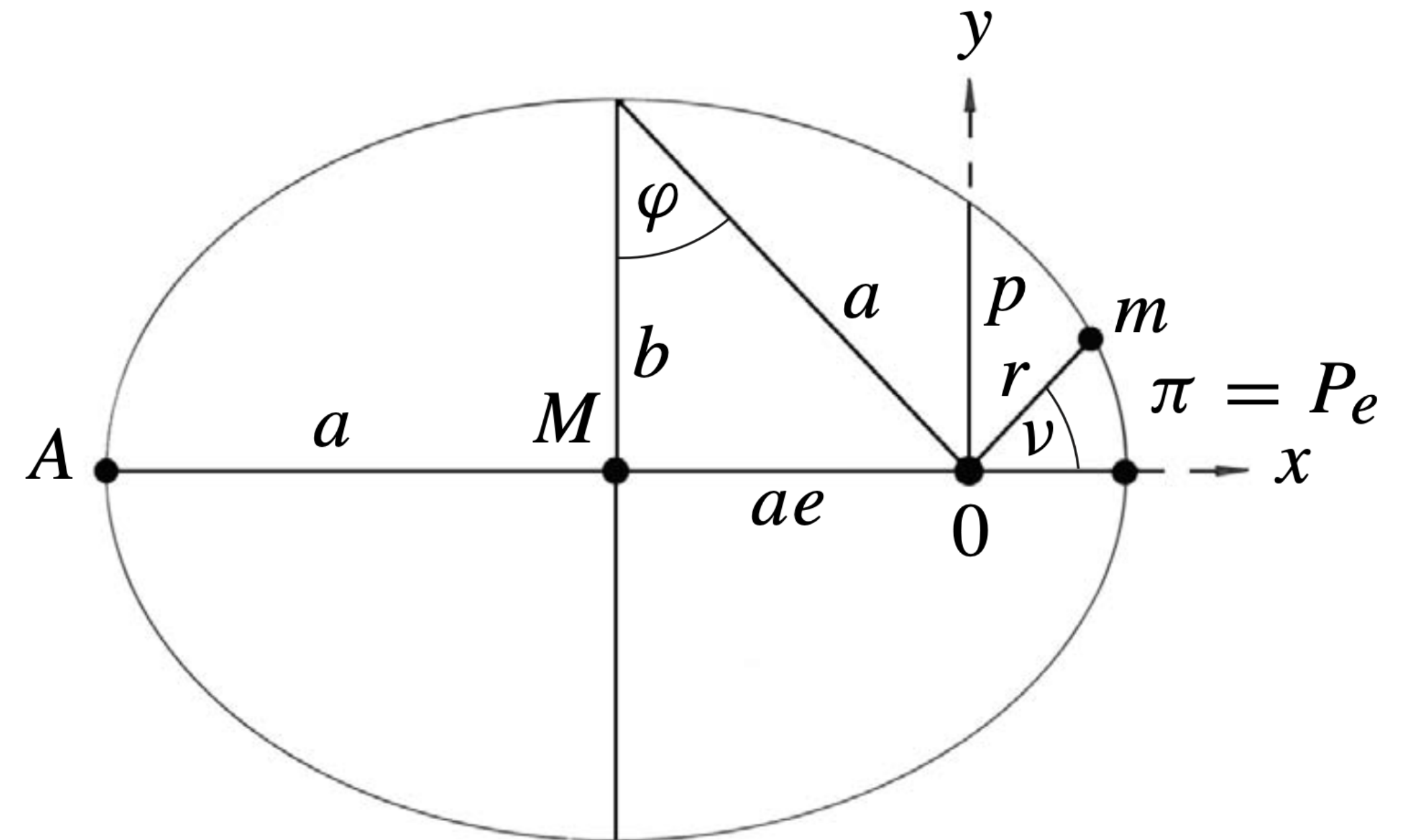
Kepler Yörünge Hareketleri

- Göksel cisimlerin hareketleri 3 Kepler yasası ile ifade edilir:
 - **I. YASA (elips yasası):** güneş sistemindeki her gezegenin yörüngesi, odağında güneş olan bir elipstir.
 - $A \rightarrow$ Apoapsis (0 noktasında Güneş olursa **apohelios**, Dünya olursa **apoge**)
 - $\pi \rightarrow$ Periapsis (0 noktasında Güneş olursa **perihelios**, Dünya olursa **perige**)
 - $\nu \rightarrow$ gerçek anomali



Kepler Yörünge Hareketleri

- Kepler hareketi bir düzleme karşılık gelir.
- Merkezi “0” olan bir koordinat sisteminin tanımında kullanılabilir (Yörünge koordinat sistemi)
- “m” kütleli bir cismin konumu ise r, v ile tanımlanabilir ($\overline{0\pi}$ yörünge koordinat sisteminin bir eksenini oluşturursa)
 - $r \rightarrow$ çeken ana kütleden m kütlesi merkezleri arasındaki mesafe
 - $v \rightarrow$ gerçek anomali
 - $a \rightarrow$ büyük yarı-eksen
 - $e \rightarrow$ birinci eksentrisite (1. dışmerkezlilik)
 - $p \rightarrow$ elips parametresi



Kepler Yörünge Hareketleri

- Kepler'in I. Yasasının matematiksel ifadesi

$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos v}$$

Elips geometrisinden,

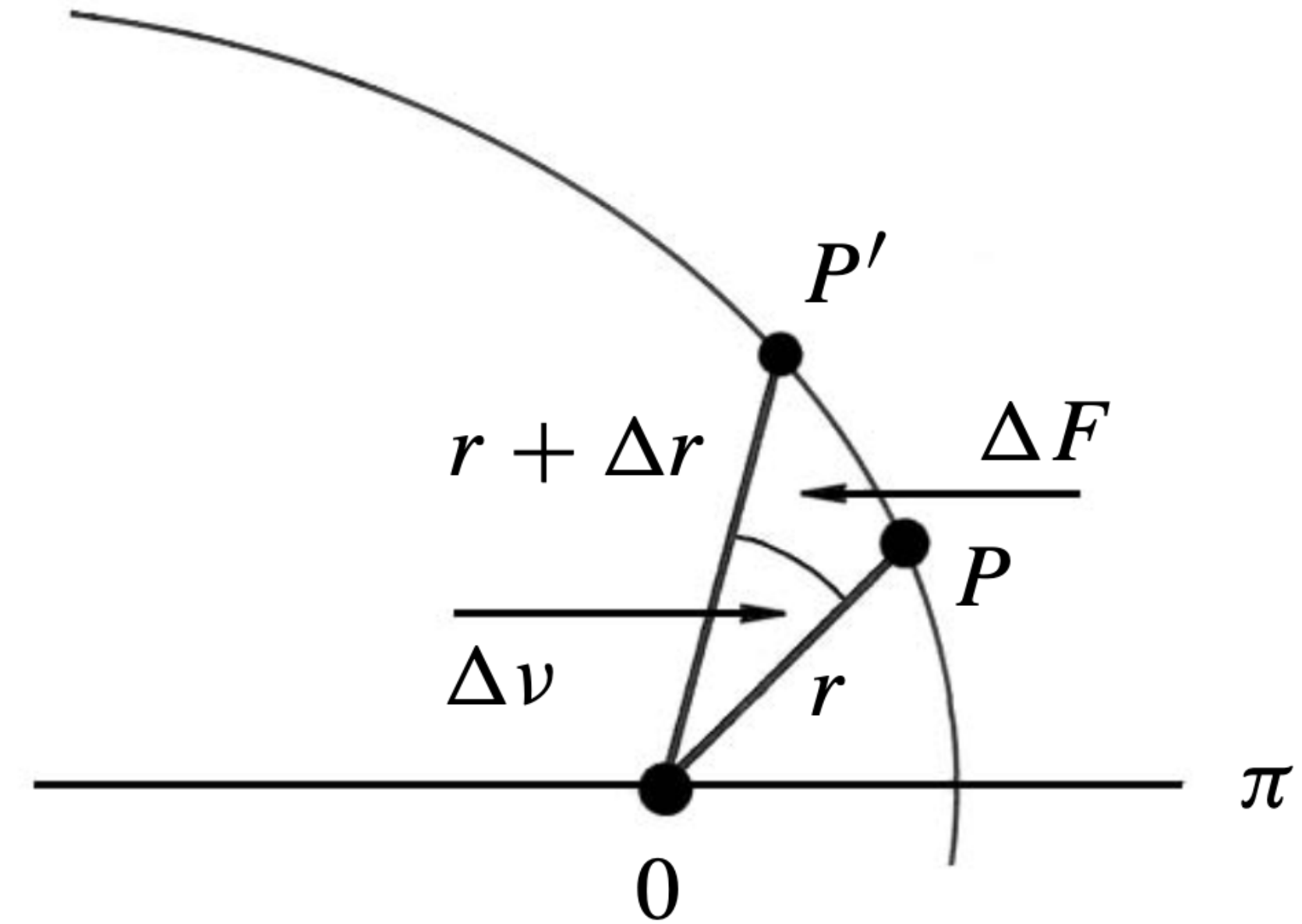
$$p = \frac{b^2}{a}; \quad e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

- Eğer $e = 0$ ise, elips daireye döner ve $a = b = p$ olur.

Kepler Yörünge Hareketleri

- **II. YASA (eşit alanlar yasası):** Ana kütlenin (örn: Güneş) çekimi etkisindeki ihmal edilebilir “m” kütleli cismi birleştiren vektör (doğru parçası) yörünge düzleminde eşit zaman aralıklarında eşit alanlar süpürür.
- Bu yasa ile “m” kütleli cismin konumu r , v yörünge koordinat sistemi kutupsal koordinatlarının bir fonksiyonu olarak belirlenebilir

$$\Delta F \approx \frac{1}{2} r^2 \Delta v \approx \Delta t \cdot \text{sabit}$$



Kepler Yörünge Hareketleri

- **III. YASA (harmoniklik yasası):** Bir yörüngenin büyük yarı-ekseninin küpü gezegenin yörünge periyodunun karesi ile doğru orantılıdır.
 - Gezegenin yörünge periyodu

$$T = \text{Elips alanı} \frac{dF}{dt} = \frac{2\pi ab}{h}$$

Ortalama açısal hızı

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}$$

olarak elde edilir.

Kepler Yörünge Elemanları

a $\rightarrow$ büyük yarı-eksen

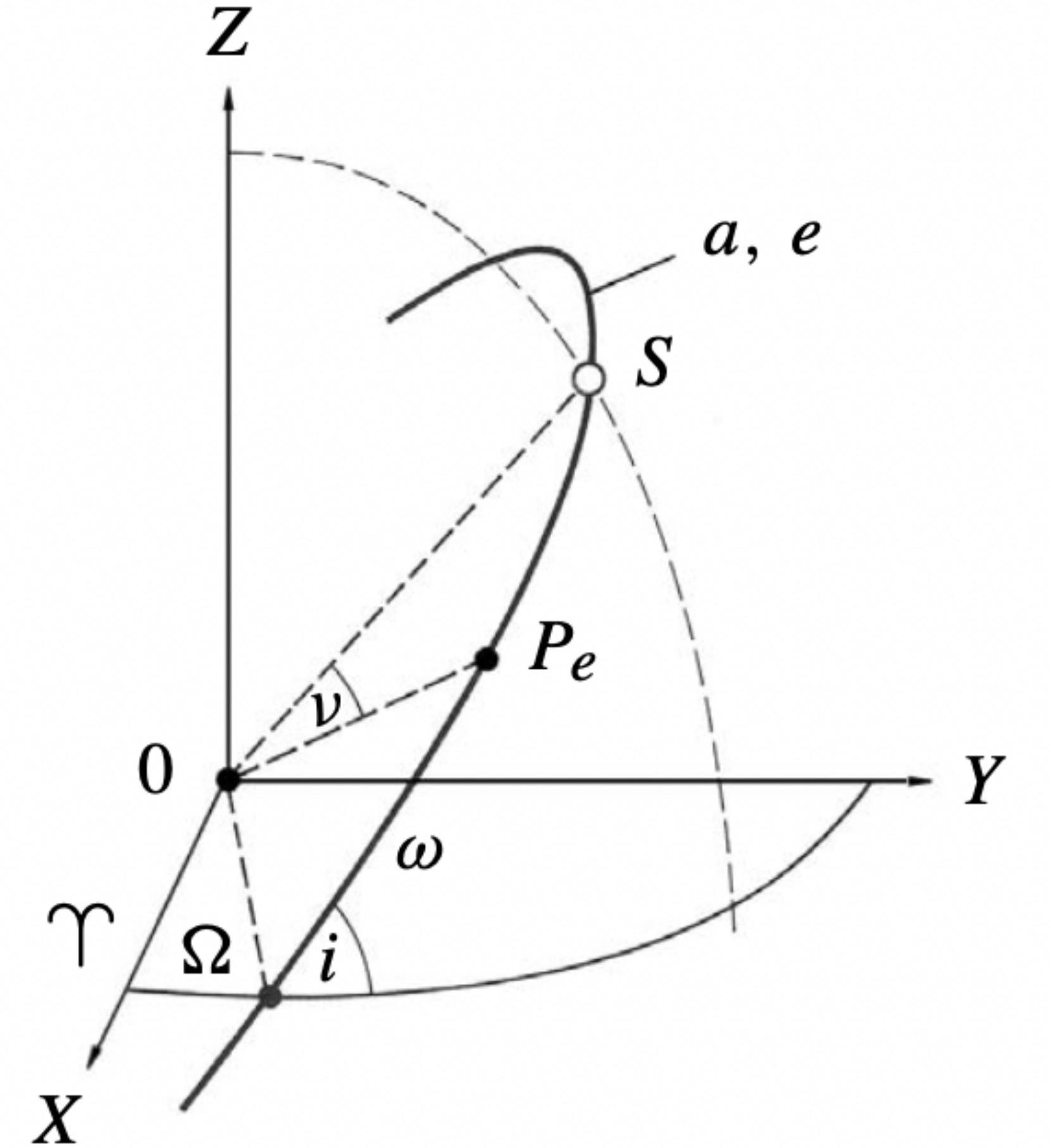
e $\rightarrow$ eksentrisite (1. dışmerkezlilik)

i $\rightarrow$ yörünge eğimi (ekvator düzlemine göre)

Ω $\rightarrow$ düğüm noktası rektesenzyonu

ω $\rightarrow$ perige argümanı

v $\rightarrow$ gerçek anomali



4. Hafta: Kepler Yörünge Elemanları ile Uydu Konumunun Hesaplanması

Broadcast Efemeris Koordinatlarının Hesabı

Yerçekim sabiti

$$GM_e = 3986004.418e + 8 \text{ m}^3/\text{s}^2 \text{ WGS84}$$

Yerin açısal dönme hızı

$$w_e = 7.2921151467e - 5 \text{ rad/sn WGS84}$$

Yörünge büyük yarıekseni

$$a = \sqrt{(a)^2}$$

Ortalama yörünge hızı

$$n_0 = \sqrt{\frac{GM_e}{a^3}}$$

Düzeltilmiş yörünge hızı

$$n = n_0 + \Delta n$$

t_{0e} 'ye göre zaman

$$t_k = t - t_{0e}$$

Ortalama Anomali

$$M_k = M_0 + n \cdot t_k$$

Kepler Denkleminin göre Ort. An.

$$M_k = E_k - e \cdot \sin(E_k)$$

$$E_k = M_k + e \cdot \sin(E_k)$$

Broadcast Efemeris Koordinatlarının Hesabı

Gerçek anomali

$$v_k = \operatorname{atan} \left(\frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E_k}{\cos E_k - e} \right)$$

Enlem argümanı

$$u_{k,0} = \omega + v_k$$

Düzeltilmiş enlem argümanı

$$u_k = u_{k,0} + C_{uc} \cos 2u_{k,0} + C_{us} \sin 2u_{k,0}$$

Düzeltilmiş yarıçap

$$r_k = a(1 - e \cos E_k) + C_{rc} \cos 2u_{k,0} + C_{rs} \sin 2u_{k,0}$$

Düzeltilmiş yörümge eğimi

$$i_k = i_0 + \dot{i} t_k + C_{ic} \cos 2u_{k,0} + C_{is} \sin 2u_{k,0}$$

Düzeltilmiş düğüm noktası rektesenzyonu

$$\Omega_k = \Omega_0 + (\dot{\Omega} - w_e) t_k - w_e t_{0e}$$

Broadcast Efemeris Koordinatlarının Hesabı

Yer merkezli koordinatlar;

$$x_k = r_k(\cos\Omega_k \cdot \cos u_k - \sin\Omega_k \cdot \sin u_k \cdot \cos i_k)$$

$$y_k = r_k(\sin\Omega_k \cdot \cos u_k + \cos\Omega_k \cdot \sin u_k \cdot \cos i_k)$$

$$z_k = r_k \cdot \sin u_k \cdot \sin i_k$$

ve Uydu saat hatası;

$$\delta = a_0 + a_1(t - t_c) + a_2(t - t_c)^2$$

5. Hafta: Sayısal Uygulama

Broadcast Efemeris Koordinatlarının Hesabı

- 2022-01-01 00:00:00
zamanında G01
uydusu için verilen
yayın efemerisini
kullanarak
2022-01-01 01:30:00
zamanındaki
($t_k = 5400$ sn) G01
uydusunun
koordinatlarını
hesaplayınız.

```
2 NAVIGATION DATA
CCRINEXN V1.6.0 UX CDDIS 02-JAN-22 18:31 RINEX VERSION / TYPE
IGS BROADCAST EPHEMERIS FILE PGM / RUN BY / DATE
COMMENT
0.1211D-07 -0.7451D-08 -0.5960D-07 0.1192D-06 ION ALPHA
0.1167D+06 -0.2458D+06 -0.6554D+05 0.1114D+07 ION BETA
0.279396772385D-08 0.799360577730D-14 147456 2191 DELTA-UTC: A0,A1,T,W
18 LEAP SECONDS
END OF HEADER
1 22 1 1 0 0 0.0 0.469126738608D-03-0.100044417195D-10 0.000000000000D+00
0.390000000000D+02-0.141125000000D+03 0.398838041777D-08-0.624294238235D+00
-0.736303627491D-05 0.112181392033D-01 0.469572842121D-05 0.515367499542D+04
0.518400000000D+06-0.316649675369D-07-0.103661124009D+01 0.195577740669D-06
0.986418769490D+00 0.299750000000D+03 0.884087601569D+00-0.813355308085D-08
-0.377872882780D-09 0.100000000000D+01 0.219000000000D+04 0.000000000000D+00
0.200000000000D+01 0.000000000000D+00 0.512227416039D-08 0.390000000000D+02
0.511218000000D+06 0.400000000000D+01 0.000000000000D+00 0.000000000000D+00
```

Yayın Yörünge Veri Formatı:

SVN	Yıl	Ay	Gn	ST	DK	SN	a_0	[sn]	a_1	[]	a_2	[1/sn]
							C_{rs}	[m]	Δn	[rad/s]	M_0	[rad]
							C_{uc}	[rad]	C_{us}	[rad]	$a^{1/2}$	[m ^{1/2}]
							t_e	[sn]	l_0	[rad]	C_{is}	[rad]
							i_0	[rad]	w_0	[rad]	$\dot{\Omega}$	[rad/sn]
							$\dot{i}$	[rad/sn]	W_{GPS}	[]	i_{PL2}	[m]
							Acrc	[]	GpDy	[sn]	EOT	[sn]
							t_c	[sn]				

Broadcast Efemeris Koordinatlarının Hesabı

igs21906.sp3									
Q 2022 1 1 1 30									
PG19	-15728.999038	-20198.505904	7148.177077	99.020570	5	0	5	00	
PG20	-18186.688068	-4339.350226	-18776.845236	517.374342	6	8	7	112	
PG21	15348.931869	-4581.503127	21788.769996	155.098637	6	6	4	79	
PG22	24060.646274	-9334.422731	5947.530646	-428.107238	6	5	5	80	
PG23	-10607.992256	17902.467055	16437.048013	15.838367	4	5	7	97	
PG24	-14401.667954	10533.436428	19260.165143	276.672733	7	5	6	79	
PG25	-16804.227931	16914.922422	-11675.002646	264.220566	7	3	4	91	
PG26	13217.644762	10211.964987	-20779.441803	170.262291	9	6	7	80	
PG27	23285.314638	12037.323288	5231.742638	40.437258	6	7	9	104	
PG28	-8572.602631	-12975.296217	22040.735967	431.503857	9	7	8	95	
PG29	-8518.996151	12095.002135	-22099.521364	-461.452292	8	8	7	79	
PG30	-883.130536	-25934.536333	5090.126613	-503.527924	2	4	5	78	
PG31	7899.777498	20676.500079	-14444.097786	-157.786842	7	6	5	81	
PG32	13588.498372	19645.911565	11930.319950	-43.500300		4	3	85	
* 2022 1 1 1 30 0.00000000									
PG01	13053.452442	-12567.273484	19015.357387	469.068084	5	5	5	77	
PG02	-13897.857013	-10731.777352	-19234.111607	-647.404933	6	6	4	93	
PG03	23063.078724	-13049.403781	-643.152090	-61.225209	4	6	6	77	
PG04	17262.263878	-5017.833996	-19576.498381	-196.906984	7	5	5	78	
PG05	-22745.404207	2304.441773	-13807.571691	-66.348191	9	7	8	95	
PG06	-5897.543128	-23848.903921	-9940.436543	158.131150	6	5	6	76	
PG07	5796.357791	-24566.761176	-7030.814898	297.167529	7	4	5	89	
PG08	23455.600925	3957.619394	12145.308762	-50.321583	7	5	7	85	
PG09	6365.899092	-14089.976309	-21668.360666	-359.182159	7	6	7	78	
PG10	-490.518953	16500.674780	20873.742786	-282.346792	5	5	6	98	
PG11	-12511.936140	-13133.655407	-19411.334414	-1.387568	8	8	4	96	
PG12	-24395.906599	10205.333277	1203.999815	-149.137982	8	4	2	90	
PG13	-22572.650657	-12363.996827	6730.163937	238.225537	3	10	6	117	
PG14	1626.812742	16004.405462	20402.127867	64.027620	6	4	5	100	

6. Hafta

Uydu Yörünge ve Hız Bilgileri ile Kepler Yörünge Elemanları

- Bir uydunun yörüngedeki hareketini tanımlamak için **6 parametre** (Kepler yörünge elemanları)
 - Yörünge'nin şeklini tanımlayan; a ve e
 - Uydunun yörüngedeki konumunu tanımlayan; M
 - Yörünge'nin uzaydaki yönelimini (dönüklüklerini) tanımlayan; Ω , i ve ω
- Kepler yörünge elemanları ile bir uydunun konum ve hızını hesaplamak, Dolayısıyla, uydu konum ve hız bilgileri kullanarak Kepler yörünge elemanlarının hesabı mümkündür.

Uydu Yörünge ve Hız Bilgileri ile Kepler Yörünge Elemanları

- Konum $\mathbf{r}$ ve hız $\dot{\mathbf{r}}$ vektörlerinin vektörel çarpımından, açısal hız vektörü,

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y\dot{z} - z\dot{y} \\ z\dot{x} - x\dot{z} \\ x\dot{y} - y\dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix}$$

- Ω ve i 'nin trigonometrik fonksiyonları ile açısal hız vektörünün yönü,

$$\mathbf{W} = \frac{\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|} = \begin{bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\Omega \cdot \sin i \\ -\cos\Omega \cdot \sin i \\ \cos i \end{bmatrix}$$

Burada, $|\mathbf{h}| = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}$

Uydu Yörünge ve Hız Bilgileri ile Kepler Yörünge Elemanları

- Yörünge eğimi ve düğüm noktası rektasenzyonu, i ve Ω

$$i = \operatorname{atan} \left(\frac{\sqrt{W_x^2 + W_y^2}}{W_z} \right)$$

$$\Omega = \operatorname{atan} \left(\frac{W_x}{-W_y} \right)$$

Uydu Yörünge ve Hız Bilgileri ile Kepler Yörünge Elemanları

- Yörünge büyük yarı eksen ve eksentrisite, a ve e

$$a = \left\{ \frac{2}{|\mathbf{r}|} - \frac{|\dot{\mathbf{r}}|^2}{GM_e} \right\}^{-1}$$

Burada, $GM_e = 3.986005E + 14 \text{ m}^3/\text{sn}^2$ ve $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $|\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

$$e = \sqrt{1 - \frac{|\mathbf{h}|^2}{a \cdot GM_e}}$$

Uydu Yörünge ve Hız Bilgileri ile Kepler Yörünge Elemanları

- Eksentrik anomaly, E

$$E = \operatorname{atan} \left\{ \frac{\frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{a^2 n}}{1 - \frac{|\mathbf{r}|}{a}} \right\}$$

Burada, $\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}$ (skaler çarpım), $n = \sqrt{\frac{GM_e}{a^3}}$ (ortalama açısal hız)

Uydu Yörünge ve Hız Bilgileri ile Kepler Yörünge Elemanları

- Perige argümanı (ω), gerçek anomali (v) ve enlem argümanı (u)

$$u = \operatorname{atan} \left\{ \frac{z}{-x \cdot W_y + y \cdot W_x} \right\}$$

$$v = \operatorname{atan} \left\{ \frac{\sqrt{1 - e^2} \cdot \sin E}{\cos E - e} \right\}$$

$$\omega = u - v$$

olarak hesaplanırlar.

Uydu Yörünge ve Hız Bilgileri ile Kepler Yörünge Elemanları

- **Uygulama**: 2022-10-31 10:00 zamanında aşağıda konum ve hız vektörleri verilen bir uydunun Kepler yörünge elemanlarını hesaplayınız?

$$\mathbf{r} = 4000[km]i + 6000j + 5000k$$

$$\dot{\mathbf{r}} = -1.5\left[\frac{km}{sn}\right]i + 2j + 5k$$